LE JOURNAL DE PHYSIQUE

ET

LE RADIUM

SUR UN ANALYSEUR DE MOBILITÉS POUR LES IONS GAZEUX. I.

Par Paul LANGEVIN.

Sommaire. — Paul Langevin, maintenu en résidence forcée à Troyes de 1940 à 1944 par les autorités d'occupation, y a poursuivi son travail scientifique. L'absence de tout laboratoire ne lui a permis de mener à bien que des recherches théoriques, comme celle « Sur les chocs entre neutrons rapides et noyaux de masse quelconque » (*Ann. de Physique*, 1942, **17**, 303-317) et des projets d'expériences qu'il espérait réaliser après la Libération.

C'est ainsi qu'il a conçu et discuté en 1942-43, un analyseur de mobilités pour les ions gazeux. L'appareil devait, en donnant le « spectre » des mobilités, permettre d'étudier la nature des ions et de suivre leur formation et leur évolution. La méthode proposée consiste à soumettre à un champ radial les ions participant, d'autre part, au mouvement de rotation du gaz entraîné par un manchon cylindrique métallique mince qui tourne entre deux armatures cylindriques fixes, l'axe du système étant vertical.

Les ions sont émis par une fente verticale du cylindre fixe intérieur; le manchon mobile comporte des fentes horizontales qui les laisse passer. Ils sont reçus par une électrode isolée en forme de languette verticale portée par l'armature extérieure fixe. La trajectoire des ions entraînés à la fois par le champ et le mouvement du fluide est calculée, la précision de l'appareil, qui pourrait dépasser 1 pour 100, est discutée, les diverses causes d'erreur étudiées, le manchon tournant étant d'abord considéré comme infiniment mince.

Dans deux Mémoires qui seront publiés à la suite de celui-ci, figurent (II) l'étude du champ électrostatique et du mouvement du gaz dans le cas où le manchon mobile est épais, et (III) l'étude générale du champ électrostatique d'une grille conductrice placée entre deux conducteurs plans parallèles.

Un travail expérimental est en cours afin de mettre en œuvre les principes de la méthode d'analyse des mobilités des ions gazeux proposée dans cet article.

La question de savoir si les ions produits dans les gaz par divers rayonnements ont, pour chaque signe, une mobilité unique ou se répartissent, au contraire, entre toute une gamme, plus ou moins continue, de mobilités, ne me paraît pas complètement résolue. Elle a cependant une grande importance en liaison avec les mécanismes de formation de l'agglomération moléculaire qui constitue l'ion et de passage d'une forme stable de cette agglomération à une autre. Existe-t-il dans un même gaz plusieurs de ces formes stables, comme on devra l'admettre si les mobilités sont effectivement multiples pour les ions d'un même signe ? Le passage d'une forme à l'autre est-il possible et quel est en moyenne le temps nécessaire ? Pour répondre à ces questions, il est nécessaire de disposer d'un appareil permettant de séparer des autres, dans un gaz conducteur, les ions de mobilités comprises dans un intervalle suffisamment étroit, soit pour en mesurer le nombre par la charge qu'ils transportent, soit pour les isoler et suivre leur évolution ultérieure.

Le procédé le plus simple, pour effectuer cette séparation, est celui des courants gazeux où le mouvement des ions résulte de la composition d'un mouvement d'entraînement qui est celui du gaz et d'un mouvement relatif des ions par rapport au gaz sous l'action du champ électrique créé dans le volume occupé par ce dernier.

Sous la forme où elle a été appliquée jusqu'ici, soit pour les petits, soit pour les gros ions, cette méthode n'est guère utilisable que pour l'air parce qu'elle exige l'emploi de volumes considérables de gaz pour entretenir le courant gazeux.

Dans l'appareil étudié ici, je me suis proposé, au contraire, d'utiliser comme mouvement du gaz un régime permanent de circulation à l'intérieur d'un récipient clos, dans des conditions où, la turbulence étant évitée, la distribution de la vitesse avec

laquelle le gaz est entraîné puisse être exactement connue, ainsi que, par suite, les trajectoires d'ions de mobilité donnée sous l'action d'un champ électrique de distribution également connue. La forme cylindrique du mouvement permanent de circulation m'a semblé être la plus commode.

Principe de l'appareil. — Un cylindre fixe ABA′B′ porte, suivant une de ses génératrices BB′ une fente fine F; la région I voisine de la fente à l'intérieur du cylindre est ionisée par un procédé quelconque (rayons α, rayons X, etc.). A l'extérieur du cylindre existe un champ électrique radial qui fait sortir par la fente F les ions d'un certain signe qui y sont amenés par diffusion et refoule à l'intérieur du cylindre ceux du signe opposé —. Un second cylindre fixe CDC′D′ coaxial au premier et qui constitue d'ailleurs l'enveloppe de tout l'appareil, porte suivant une de ses génératrices placée dans un azimuth différent de celui de la fente F et que, pour la commodité de la figure, on a représenté dans la figure 1 à 180°, une électrode

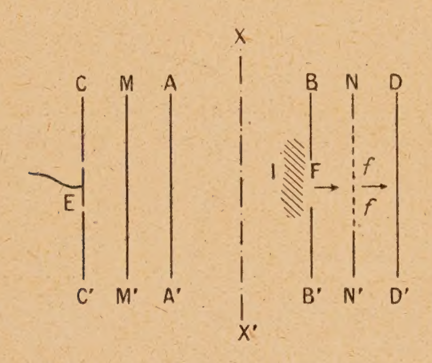


Fig. 1.

étroite E destinée à mesurer le courant d'ions qui lui parviendra, ou une autre fente destinée à laisser sortir ces mêmes ions si l'on veut étudier leur comportement ultérieur.

Entre les deux cylindres fixes se trouve un manchon cylindrique MNM′N′ coaxial auquel on imprime autour de l'axe commun XX′ un mouvement de rotation uniforme. Ce mouvement crée dans le gaz un régime permanent de circulation qui reste laminaire tant que la rotation est suffisamment lente et dans lequel la vitesse du gaz, nulle au contact des cylindres fixes, est égale à la vitesse de la surface du manchon au contact de celle-ci.

Le manchon porte, à la hauteur de F et de E des fentes fines *ff*, allongées dans le sens horizontal (XX′ étant supposé vertical) pour permettre le passage à travers ce manchon d'une partie des ions qui lui arrivent de la fente F. Ces ions trouvent, entre le manchon et le cylindre extérieur, un champ électrique radial de même sens que celui qui les a amenés au manchon et continuent, par conséquent, à se déplacer vers le cylindre extérieur.

Des différences de potentiel convenables établies entre les trois cylindres servent à créer ces champs.

Le mouvement relatif des ions par rapport au gaz étant ainsi radial, il résulte de la circulation créée par le mouvement du manchon, que ces ions sont entraînés dans le sens de la rotation, et cela d'autant plus que leur mobilité est plus faible. La lame verticale étroite d'ions qui sort de la fente F reste fine malgré l'entraînement du gaz si les ions ont tous la même mobilité, mais se trouve, au contraire, étalée, dispersée s'il y a des formes stables de mobilités différentes et l'arrivée des ions sur la surface interne du cylindre extérieur se fait alors suivant un véritable spectre de mobilités que l'électrode ou la fente E permettent d'explorer.

La mobilité des ions qui arrivent à E est fonction de l'écart angulaire θ entre les azimuths de E et de F, ainsi que des différences de potentiel établies entre les cylindres et de la vitesse angulaire de rotation ω imposée au manchon. On peut donc explorer le spectre en faisant varier l'un quelconque de ces trois éléments. Nous verrons que la meilleure solution serait de faire varier la vitesse angulaire en laissant fixes l'azimuth θ et les différences de potentiel.

La finesse de cette exploration, ce qu'on peut appeler le pouvoir séparateur de l'appareil, dépend avant tout de la sensibilité du procédé de mesure employé pour le courant qui arrive à E. Plus cette sensibilité est grande et plus la fente F ainsi que la languette électrode E peuvent être fines. On peut, comme nous le verrons, faire en sorte que la diffusion ou la répulsion mutuelle des ions ne produise pas un étalement supérieur à la largeur de E. Une analyse plus précise des autres causes d'erreur nous montrera qu'il est parfaitement possible d'obtenir un pouvoir séparateur de l'ordre du centième, c'est-à-dire de faire en sorte que les ions recueillis simultanément par l'électrode E, ou passant simultanément par la fente qui remplace celle-ci, aient des mobilités ne différant pas de leur valeur moyenne de plus du centième de celle-ci.

Calcul des trajectoires. — Les deux composantes de la vitesse de l'ion étant horizontales, sa trajectoire sera contenue tout entière dans la section droite des cylindres menée par le point F où il sort de la fente (*fig.* 2). Si l'on suppose dans la figure 2 comme on l'a fait dans la figure 1 que l'azimuth de l'électrode E est à 180° de celui de la fente F, ce qui n'a rien d'essentiel, la trajectoire sera la courbe FPQE, si le manchon tourne dans le sens des aiguilles d'une montre. Cette trajectoire traversera le manchon en Q toutes les fois que ce point tombera à l'intérieur d'une des fentes *f*. Celles-ci sont supposées assez fines pour que leur présence

ne trouble pas appréciablement le mouvement d'entraînement du gaz tel que le produirait le manchon plein. Nous évaluerons plus loin l'ordre de grandeur de l'erreur correspondante. Le manchon sera supposé ici infiniment mince et on le rendra, pratiquement, aussi mince que possible. Là aussi l'erreur commise est d'un ordre de grandeur facile à évaluer.

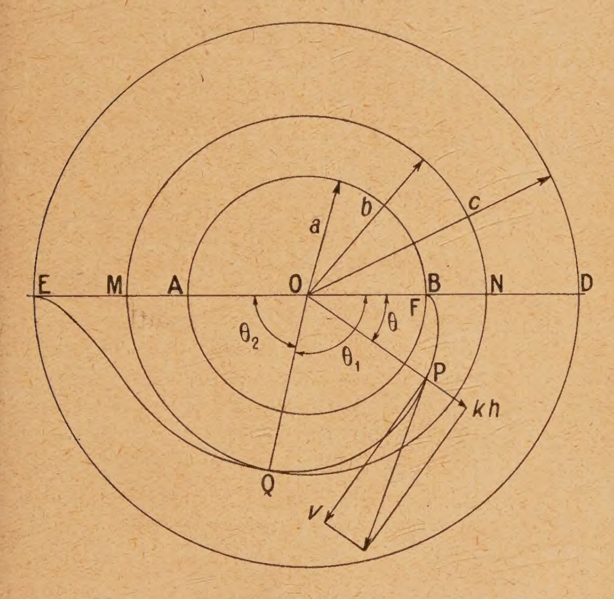


Fig. 2.

Le gaz étant immobile en F au contact du cylindre fixe, la trajectoire part tangentiellement à OF pour s'incurver ensuite dans le sens de la rotation. Soit P un point quelconque de coordonnées polaires r et θ par rapport au centre O et à l'axe OF.

Si le régime permanent du mouvement du gaz est bien laminaire, la vitesse d'entraînement v au point P est tangentielle, c'est-à-dire perpendiculaire au rayon OP; si, d'autre part, le champ électrique en P, h est radial, l'équation différentielle de la trajectoire s'écrit

$$\frac{r\,d\theta}{dr} = \frac{v}{kh}, \tag{1}$$

k étant la mobilité de l'ion considéré et kh la vitesse qu'il prend par rapport au gaz sous l'action du champ h.

Cherchons d'abord la distribution de la vitesse d'entraînement v dans le régime permanent laminaire où la viscosité du gaz joue le rôle essentiel. Si ρ représente la densité du gaz, μ son coefficient de viscosité et p la pression, variable avec r en vertu des effets centrifuges, les équations du régime permanent laminaire prennent une forme particulièrement simple où les effets de viscosité et d'inertie se séparent

$$\mu\,\Delta v = 0, \qquad \rho\frac{v^2}{r} = \frac{dp}{dr}, \tag{2}$$

Δ étant l'opérateur laplacien qui s'écrit ici où v ne dépend que de r

$$\Delta v = \frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv}{dr} - \frac{v^2}{r} = 0. \tag{3}$$

On peut facilement retrouver cette équation en écrivant la condition de régime permanent pour une couche cylindrique de hauteur égale à l'unité comprise entre les cylindres de rayons r et $r + dr$. Il faut écrire que le moment total de quantité de mouvement transmis à cette couche à travers ses faces cylindriques est nul en régime permanent. Seules interviennent les actions tangentielles de viscosité dont l'expression par unité de surface est, par extension aux coordonnées curvilignes (r, θ) de l'expression $\mu\frac{dv}{dz}$ valable en coordonnées rectilignes

$$\mu\frac{Dv}{Dr},$$

le symbole D étant celui de la dérivée covariante :

$$\mu\left(\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r}\right).$$

Le moment de la quantité de mouvement transmis par cet effort tangentiel à la couche cylindrique à travers sa face interne de rayon r est

$$M = -2\pi\mu r^2\left(\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r}\right)$$

et la condition de régime permanent devient

$$\frac{dM}{dr} = 0$$

ou

$$\frac{d}{dr}r^2\left(\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r}\right) = 0, \tag{4}$$

ce qui est bien équivalent à (3).

L'intégration de (3), facilitée par la forme (4), montre que l'intégrale générale est de la forme

$$v = Ar + \frac{B}{r}, \tag{5}$$

où A et B sont des constantes.

Appliquons ce résultat à la région (*fig.* 2) comprise entre $r = a$ et $r = b$; si ω désigne la vitesse angulaire de rotation imposée au manchon, les conditions aux limites pour cette région sont

$$v = 0 \quad \text{pour} \quad r = a \qquad \text{et} \qquad v = \omega b \quad \text{pour} \quad r = b.$$

Ces conditions déterminent A et B dans la solution générale (5) et l'on obtient pour r compris entre a et b

$$v = \frac{\omega b^2}{b^2 - a^2}\left(r - \frac{a^2}{r}\right). \tag{6}$$

De même, à l'extérieur du manchon, pour r

compris entre b et c

$$v = \frac{\omega b^2}{c^2 - b^2}\left(\frac{c^2}{r} - r\right). \qquad (7)$$

Si le manchon tournant a une épaisseur finie, avec un rayon extérieur b', cette formule (7) reste exacte pour r compris entre b' et c à condition d'y remplacer b par b'.

D'autre part, si U_1 représente la différence de potentiel établie entre le cylindre intérieur et le manchon, le champ radial entre $r = a$ et $r = b$ est donné par la formule bien connue du condensateur cylindrique

$$h = \frac{U_1}{r \mathrm{L} \frac{b}{a}}. \qquad (8)$$

L, logarithme népérien.

De même, si U_2 est la différence de potentiel maintenue entre le manchon et le cylindre extérieur, le champ est donné entre $r = b$ et $r = c$ par la formule

$$h = \frac{U_2}{r \mathrm{L} \frac{c}{b}}, \qquad (9)$$

avec substitution de b' à b si l'on veut tenir compte de l'épaisseur finie du manchon.

Remarquons que, si l'on fait en sorte que

$$\frac{U_1}{\mathrm{L} \frac{b}{a}} = \frac{U_2}{\mathrm{L} \frac{c}{b}} = C, \qquad (10)$$

l'intensité du champ h ne subit aucune discontinuité à la traversée du manchon et, ce qui est particulièrement important, le manchon peut présenter des ouvertures quelconques sans qu'il en résulte aucune déformation des lignes de force radiales et que le champ cesse d'être représenté dans tout l'intervalle entre les deux cylindres fixes par l'expression $\frac{C}{r}$.

Ceci cesse d'être vrai si le manchon a une épaisseur finie. Nous verrons comment on peut évaluer l'importance de l'erreur qui en résulte par rapport aux formules simples que nous établissons en ce moment et comment cette erreur peut être maintenue dans les limites admises.

L'application des formules (6) et (8) à l'équation différentielle (1) permet de calculer, par une intégration simple, l'angle θ_1 dont l'ion est dévié en azimut (*fig.* 2) entre le cylindre intérieur fixe et le manchon

$$\theta_1 = \frac{\omega b^2}{k U_1}\left[\frac{1}{2} - \frac{a^2}{b^2 - a^2} \mathrm{L} \frac{b}{a}\right] \mathrm{L} \frac{b}{a}. \qquad (11)$$

On aura de même

$$\theta_2 = \frac{\omega b^2}{k U_2}\left[\frac{c^2}{c^2 - b^2} \mathrm{L} \frac{c}{b} - \frac{1}{2}\right] \mathrm{L} \frac{c}{b}. \qquad (12)$$

Si l'on suppose réalisée la condition (10) et si l'on réalise par construction la relation simple

$$\frac{c}{b} = \frac{b}{a} = \alpha, \qquad (13)$$

qui exprime que le rayon du manchon est la moyenne géométrique des rayons des cylindres fixes, on obtient, pour la déviation totale θ la formule remarquablement simple

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 = \frac{2 \omega b^2}{k U} (\mathrm{L} \alpha^2), \qquad (14)$$

où $U = U_1 + U_2 = 2 U_1$ est la différence de potentiel totale maintenue entre les cylindres fixes et partagée en deux parties égales par le manchon en vertu de (10) et (13).

Pour une première réalisation de l'appareil, j'ai admis les valeurs suivantes :

$$b = 8 \text{ cm}, \qquad c = 10 \text{ cm}, \qquad \alpha = \frac{c}{b} = 1{,}25, \qquad \mathrm{L}\alpha = 0{,}2231.$$

La vitesse angulaire de rotation ω que l'on peut adopter pour le manchon est limitée supérieurement par la condition que le régime laminaire soit stable. Cette condition s'exprime en écrivant que le nombre de Reynolds, qui sera ici, pour la région comprise entre le manchon et le cylindre extérieur

$$R = \frac{\rho}{\mu} \omega b (c - b), \qquad (15)$$

ne dépasse pas une limite supérieure de l'ordre de 2000. Pour l'air sous la pression atmosphérique, $\frac{\rho}{\mu}$ a la valeur 6,5 d'où, avec les valeurs adoptées pour b et c

$$R = 100 \omega.$$

Une vitesse angulaire de 3 t : s pour laquelle ω est égal à 6π semble donc admissible.

Pour les ions ordinaires dans l'air, k est de l'ordre de 500 en unités C. G. S.; si nous utilisons une différence de potentiel totale U égale à 0,1 unité C. G. S. ou 30V, la formule (14) donne

$$\theta = 2{,}4 \text{ radians},$$

ce qui fait un peu moins que la demi-circonférence admise sur la figure 2 et correspond à un déplacement, du fait de la rotation, du point d'arrivée des ions sur la face interne du cylindre extérieur fixe

$$\theta c = 24 \text{ cm}.$$

Une largeur de 2 mm donnée à la languette électrode E correspond bien à une finesse d'exploration du spectre de l'ordre du centième. La fente-source F, placée sur le cylindre intérieur de rayon environ moitié moindre, devra, au même ordre de précision, avoir une largeur d'environ 1 mm.

Force centrifuge et force de Coriolis. — L'équation différentielle de la trajectoire (1) a été obtenue en admettant, pour le mouvement de l'ion par rapport au gaz, la loi de mobilité en kh. Cette loi suppose que la seule force qui intervient, pour déplacer l'ion dans le gaz est la force he exercée par le champ électrique h sur la charge e de l'ion. Ceci n'est exact, en toute rigueur, que si le gaz est immobile ou en translation uniforme. Le mouvement représenté par les formules (6) ou (7) est différent. Il est facile de voir que, dans la région extérieure au manchon où la formule (7) est applicable, par exemple, le mouvement instantané d'un élément de volume du gaz situé à la distance r de l'axe, se compose :

1° d'une rotation autour de l'axe XX' de vitesse angulaire

$$\omega' = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{v} = -\frac{\omega b^2}{c^2 - b^2};$$

2° d'une translation, dans la direction tangentielle, de vitesse égale à

$$\frac{\omega b^2 c^2}{(c^2 - b^2) r};$$

3° d'une déformation pure sans changement de volume consistant en une contraction suivant une direction située dans le plan de la figure 2 et à 45° du rayon et en une dilatation égale dans la direction du plan de la figure 2 perpendiculaire à la précédente. Chacune de ces deux déformations égales et opposées produit par unité de temps une variation relative des dimensions linéaires de l'élément de volume égale à

$$\frac{\omega b^2 c^2}{2 r^2 (b^2 - c^2)},$$

c'est-à-dire de l'ordre de ω.

La rotation ω' donne lieu à une force centrifuge et à une force de Coriolis qui se superposent à la force électrique he pour déterminer le mouvement de l'ion par rapport au gaz.

Il est facile de montrer que, pour les ions ordinaires au moins, les deux premières forces sont complètement négligeables par rapport à la force électrique.

La force centrifuge est $m\omega'^2 r$ si m est la masse de l'ion; son rapport à la force électrique qui varie en raison inverse de r est maximum en même temps que r, c'est-à-dire pour la valeur c du rayon. On obtient ainsi pour le maximum de ce rapport, en utilisant la valeur (15) de ω'

$$\frac{2 m \omega^2 b^4 c^2}{(c^2 - b^2)^2 U e} \mathrm{L}\alpha. \qquad (16)$$

L'agglomération qui constitue les ions ordinaires, dans l'air en particulier, comprend au maximum une vingtaine d'atomes, ce qui représente une masse m de l'ordre de 10^{-21}g, l'ion est toujours monovalent, de sorte que e a la valeur d'environ 5.10^{-10} unité électrostatique C. G. S. En introduisant dans le rapport (16) les valeurs numériques précédemment admises pour les autres quantités, on obtient une valeur de l'ordre de 10^{-6}.

La force de Coriolis donne lieu à un résultat analogue : pour un mouvement relatif radial de vitesse kh, elle est tangentielle et a pour valeur $2 m\omega' kh$. Le rapport à la force électrique he est

$$\frac{2 m \omega' k}{e} = \frac{2 m k \omega b^2}{(c^2 - b^2) e}. \qquad (17)$$

En utilisant les valeurs numériques précédemment indiquées, on obtient pour ce rapport une valeur de l'ordre de 10^{-7}. L'influence de la rotation sur le mouvement relatif est, par conséquent, négligeable.

La translation d'ensemble ne donne lieu à aucune action tendant à déplacer l'ion par rapport au gaz. Il en est certainement de même d'une déformation pure autour du point occupé par l'ion. L'équation (1) est donc largement suffisante pour représenter les faits au degré de précision qui nous intéresse ici.

Voyons maintenant quel est l'effet de la force centrifuge sur le gaz lui-même. La seconde des équations (2)

$$\rho \frac{v^2}{r} = \frac{dp}{dr},$$

signifie que la pression dans le gaz en régime permanent de circulation doit aller en augmentant du centre à la périphérie. Pour évaluer les différences qui en résultent, désignons par ρ_0 et p_0 la densité et la pression du gaz au contact du cylindre fixe intérieur, pour r égal à a. On a, en vertu de la loi de compressibilité

$$\rho = \frac{\rho_0}{p_0} p,$$

d'où

$$\mathrm{L} \frac{p}{p_0} = \frac{\rho_0}{p_0} \int_a^r \frac{v^2}{r} dr.$$

En utilisant la formule (6) qui donne la vitesse v pour la région comprise entre a et b et en désignant par p_1 la pression à la surface du manchon, on obtient

$$\mathrm{L} \frac{p_1}{p_2} = \frac{\rho_0}{p_0} \int_a^b \frac{\omega^2 b^4}{(b^2 - a^2)^2} \left(r - \frac{a^2}{r} \right)^2 \frac{dr}{r}$$
$$= \frac{\rho_0 \omega^2 b^4}{p_0 (b^2 - a^2)^2} \left[\frac{b^4 - a^4}{2 b^2} - 2 a^2 \mathrm{L} \frac{a}{b} \right]. \qquad (18)$$

Si nous admettons, comme nous l'avons fait dans ce qui précède, les valeurs 8 cm et 10 cm pour b et c respectivement, il en résulte, pour a, d'après la relation (13), la valeur 6,4 cm.

Pour l'air à la température ordinaire, $\frac{\rho_0}{p_0}$ est de l'ordre de $1{,}3.10^{-9}$ en unités C. G. S. Avec la vitesse angulaire admise de 3 t : s, l'application de (18)

donne

$$\mathrm{L}\,\frac{p_1}{p_0} = 2{,}2.10^{-6}.$$

On trouverait de la même manière, en désignant par p_2 la pression sur la face interne du cylindre extérieur fixe

$$\mathrm{L}\,\frac{p_2}{p_1} = \frac{\rho_0\,\omega^2 b^4}{p_0(c^2-b^2)^2}\left[\frac{c^4-b^4}{2b^2} - 2c^2\,\mathrm{L}\,\frac{c}{b}\right],$$

qui conduit à la même valeur numérique

$$\mathrm{L}\,\frac{p_2}{p_1} = 2{,}2.10^{-6}.$$

La variation relative de pression, et par conséquent de densité d'un point à l'autre du gaz ne dépassera donc pas quelques millionièmes et l'on pourra considérer ce gaz comme homogène. La différence de pression, même très faible, entre la périphérie et le centre pourrait cependant avoir l'inconvénient de donner naissance à un mouvement de circulation du gaz à travers les fentes nécessairement pratiquées dans le manchon, avec retour par la partie inférieure ou supérieure de celui-ci. Il est facile de rendre ce mouvement parasite absolument négligeable en réduisant autant que possible les intervalles par lesquels peut passer le gaz pour contourner les bords inférieur ou supérieur du manchon, tout en permettant la libre rotation de celui-ci. La disposition générale de l'appareil serait ainsi celle que représente la figure 3. Ce schéma reproduit, en les précisant, les indications de la figure 1.

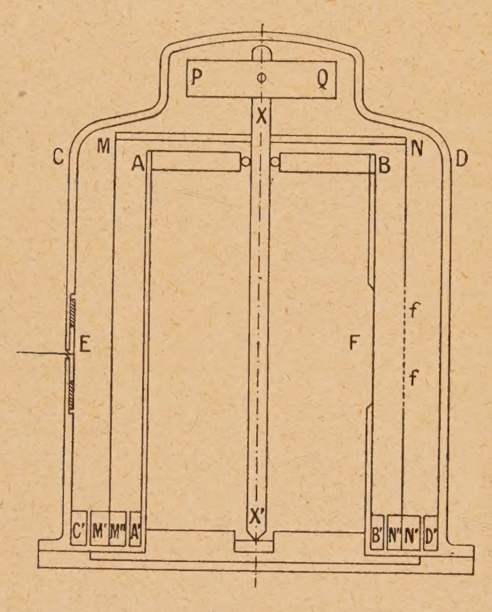


Fig. 3.

Le manchon est porté par le plateau MN, solidaire lui-même de l'axe XX'. A la partie supérieure de celui-ci est fixé un aimant ou un morceau de fer doux PQ qui permet d'exercer magnétiquement de l'extérieur, l'action nécessaire pour établir et entretenir la rotation du manchon. Aucune circulation parasite ne peut s'établir sous l'action de la force centrifuge par le bord supérieur du manchon que ferme le plateau MN. La partie inférieure, qui doit rester libre, est garnie des bourrelets cylindriques M'M"N"N' qui laissent deux intervalles étroits entre eux et les bourrelets A'B', C'D' portés par les cylindres fixes. Étant donnée la petitesse des différences de pression dues à l'action centrifuge, un calcul simple montre que cette disposition suffit à empêcher toute circulation parasite appréciable.

Les extrémités de la fente-source F et de l'électrode E sont suffisamment éloignées des bords inférieurs et supérieurs des cylindres pour que le régime laminaire représenté par les équations (6) et (7) soit réalisé dans toute la région occupée par les ions, à l'influence près des fentes horizontales *ff* que nous examinerons plus loin.

Effet de la diffusion. — La diffusion des ions a pour effet d'augmenter progressivement l'épaisseur de la lame verticale d'ions extraite de la fente F par le champ, épaisseur initialement égale à la largeur de la fente, admise plus haut comme étant de l'ordre du millimètre. Nous considérerons l'influence de la diffusion, qui tend à diminuer le pouvoir séparateur, comme négligeable si l'épaississement qui en résulte ne dépasse pas 1 mm.

Si D est le coefficient de diffusion des ions dans le gaz, et t la durée du trajet des ions entre la fente source et l'électrode, on sait que $\sqrt{Dt}$ représente l'ordre de grandeur du déplacement d'un ion par diffusion au bout du temps t. Le temps de parcours total entre la fente F et l'électrode E est facile à évaluer : on a

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}r}{kh}$$

et comme

$$h = \frac{U}{2r\,\mathrm{L}\,\alpha},$$

il vient

$$t = \int_a^c \frac{2\,\mathrm{L}\,\alpha}{kU}\,r\,\mathrm{d}r = \frac{(c^2-a^2)\,\mathrm{L}\,\alpha}{kU}, \tag{19}$$

d'où

$$\sqrt{Dt} = \sqrt{\frac{(c^2-a^2)\,\mathrm{L}\,\alpha}{U}\,\frac{D}{k}}. \tag{20}$$

Le rapport $\frac{D}{k}$ ne dépend que de la valence des ions, que l'expérience montre d'ailleurs être toujours monovalents; on a, pour ce rapport, l'expression bien connue

$$\frac{D}{k} = \frac{RT}{F},$$

où R est la constante des gaz parfaits, T la tempéra-

ture absolue et F la charge portée par un ion-gramme monovalent. A la température ordinaire on a sensiblement, en unités C. G. S. électrostatiques

$$\frac{D}{k} = \frac{1}{12\,000}.$$

Avec les dimensions adoptées plus haut et une différence de potentiel U de 0,1 unité électrostatique C. G. S., la formule (19) donne sensiblement

$$\sqrt{Dt} = 0,1$$

c'est-à-dire 1 mm.

Une indication intéressante que donne la formule (19) est que, pour un appareil donné et quel que soit le gaz, l'élargissement par diffusion ne dépend que de la différence de potentiel employée et varie en raison inverse de la racine carrée de celle-ci. Si l'on veut, au cours de l'exploration d'un spectre de mobilités maintenir constant l'épaississement par diffusion quand on fait varier la mobilité, il faut simplement maintenir constante la différence de potentiel U et explorer en faisant varier, soit la vitesse angulaire de rotation ω, soit le décalage en azimut θ de l'électrode E par rapport à la fente F.

Effet de la répulsion mutuelle des ions. — Les ions utilisés étant tous chargés du même signe, la lame mince extraite de la fente tend à augmenter d'épaisseur par répulsion mutuelle des ions qui la composent. Cet effet est facile à évaluer. Je supposerai à tous les ions une même mobilité k.

La largeur du ruban d'ions est égale à la longueur l de la fente-source, si i est l'intensité du courant représenté par les ions qui sortent de la fente, la densité superficielle électrique σ du ruban en un point où l'intensité du champ est h, a pour valeur

$$\sigma = \frac{i}{khl}.$$

lorsque le mouvement des ions est radial et de vitesse kh, c'est-à-dire lorsque le gaz est immobile.

Cette couche de densité σ produit à sa surface, de chaque côté, un champ normal à celui-ci et d'intensité $2\pi\sigma$ qui, agissant sur les ions de mobilité k présente à cette surface pendant un temps dt, produit un épaississement

$$d\varepsilon = 4\pi k\sigma\,dt = \frac{4\pi i}{hl}\,dt$$

et, en remplaçant dt par kh,

$$d\varepsilon = \frac{4\pi i}{kh^2 l}\,dr.$$

Comme d'ailleurs

$$h = \frac{U}{2r\,L\alpha}, \qquad d\varepsilon = \frac{16\pi i(L\alpha)^2}{klU^2}\,r^2\,dr.$$

En intégrant entre a et c

$$\varepsilon = \frac{16\pi i(L\alpha)^2}{3klU^2}(c^3 - a^3).$$

Cherchons, avec les données numériques admises jusqu'ici, une longueur de fente de 6 cm et des ions de mobilité égale à 500 unités C. G. S., quelle doit être l'intensité i, en unités électrostatiques C. G. S. pour que l'épaississement par répulsion reste inférieur à 1 mm. On obtient

$$i < \frac{1}{200}\ \text{C. G. S.}$$

Cette intensité de courant est celle qui sort de la fente. Celle qui est recueillie par l'électrode lorsque le manchon tourne est réduite, même en supposant des ions d'une seule mobilité, dans un rapport au maximum égal à la fraction de la surface du manchon occupée par les fentes f dans la tranche horizontale de celui-ci qui contient la fente-source et l'électrode. Ce maximum est atteint si le manchon est infiniment mince; une épaisseur finie du manchon introduit un nouveau facteur de réduction que nous étudierons plus loin. On peut fixer la fraction du courant i disponible sur l'électrode pour l'analyse des mobilités, à environ 20 pour 100, ce qui correspond à un courant de l'ordre du millième d'unité électrostatique.

Remarquons d'ailleurs que, lorsque le manchon tourne, la rotation du gaz allonge le ruban d'ions et diminue d'autant la densité superficielle des charges qu'il porte et, par conséquent, la vitesse d'épaississement par répulsion mutuelle, d'où, puisque la durée du trajet entre fente-source et électrode reste toujours la même, diminution de l'épaississement.

Remarquons encore que les forces exercées par le champ électrique radial h sur les ions présents dans le gaz sont finalement transmises à celui-ci et y produisent des mouvements parasites de la nature du vent électrique. On peut montrer, en traitant le problème ainsi posé, qu'avec les intensités de courant envisagées ci-dessus, auxquelles correspondent des distributions déterminées d'ions dans les gaz, ces mouvements parasites sont entièrement négligeables par rapport au mouvement d'ensemble imposé par la rotation du manchon.

Pouvoir séparateur. — Les résultats de la discussion précédente peuvent encore être présentés sous une autre forme. S'il est possible de réduire l'influence de la répulsion mutuelle des ions en diminuant l'intensité du courant recueilli, c'est-à-dire en augmentant la sensibilité de l'appareil de mesure électrométrique, il n'en est pas de même pour l'influence de la diffusion qui dépend seulement de la différence de potentiel employée et des dimensions de l'analyseur. Comme la diffusion joue ainsi un rôle analogue à celui de la diffraction en spec-

troscopie, il est naturel de définir le pouvoir séparateur P par le rapport entre le déplacement $c\theta$ du point d'arrivée des ions sur la surface interne du cylindre extérieur et la quantité $2\sqrt{Dt}$ qui mesure l'épaississement du ruban d'ions produit par la diffusion. En remplaçant θ et t par leurs valeurs (14) et (19), il vient

$$P = \frac{\omega b^2}{k\sqrt{U}} \sqrt{\frac{k}{D} \frac{(L\alpha)^3}{(\alpha^4 - 1)}}.$$

L'accroissement de ce pouvoir séparateur par augmentation de la vitesse angulaire ω est limitée par l'instabilité du régime laminaire. Pour tenir compte de cette circonstance, il est indiqué d'introduire dans l'expression de P le nombre R de Reynolds défini par l'équation (15). Il en résulte

$$P = \frac{\mu}{\rho} \frac{R}{k\sqrt{U}} \sqrt{\frac{k}{D} \frac{(L\alpha)^3}{(\alpha - 1)^2(\alpha^4 - 1)}},$$

$\frac{k}{D}$ est, à une température donnée, une constante commune à tous les ions monovalents et dont la racine carrée est sensiblement égale à 110 en unités C. G. S., d'où

$$P = 110 \frac{\mu}{\rho} \frac{R}{k\sqrt{U}} \sqrt{\frac{(L\alpha)^3}{(\alpha - 1)^2(\alpha^4 - 1)}}.$$

Pour un gaz donné, quand on fait varier la pression, le coefficient de viscosité μ ne change pas, non plus que le produit ρk puisque la mobilité des ions varie généralement en sens inverse de la pression. Il en résulte que, pour un gaz donné, le maximum possible pour le pouvoir séparateur (limité supérieurement par R) dépend seulement de la différence de potentiel employée et du coefficient de forme α. On peut d'ailleurs remarquer que l'influence de ce coefficient de forme sur P est très limitée, la fonction de α qui figure sous le radical dans l'expression de P ayant un maximum égal à $\frac{1}{4}$ lorsque α est voisin de l'unité et diminuant lentement lorsque α s'éloigne de l'unité, c'est-à-dire lorsque les rayons a, b, c des cylindres s'écartent de plus en plus les uns des autres. Il y a néanmoins intérêt à prendre α voisin de l'unité, c'est-à-dire à faire en sorte que les deux condensateurs cylindriques intérieurs l'un à l'autre se rapprochent autant que possible de la forme plane. En admettant la valeur $\frac{1}{4}$ pour la fonction de α, il vient

$$P = 55 \frac{\mu R}{\rho k\sqrt{U}}.$$

Pour l'air, en particulier, on a, en admettant la mobilité 500 et la valeur 2000 pour la constante R

$$P = \frac{34}{\sqrt{U}},$$

U étant exprimé en unités électrostatiques C. G. S. Pour $U = 0{,}1$, on a P voisin de 100.

Influence des fentes du manchon. — Un autre aspect du problème qu'il convient d'examiner avec soin concerne l'influence que les fentes pratiquées dans le manchon pour permettre le passage des ions peuvent avoir sur le mouvement d'entraînement du gaz.

Nous avons déjà vu que si le manchon est très mince et si la condition (10) est satisfaite par les différences de potentiel U_1 et U_2, la surface du manchon se confond avec la surface équipotentielle U_1 et la distribution du champ électrique reste exactement la même quelles que soient les ouvertures pratiquées dans le manchon et même si celui-ci est complètement enlevé. Il n'en est pas de même, naturellement, pour ce qui concerne l'entraînement du gaz, représenté en toute rigueur par les formules (6) et (7) seulement dans le cas où le manchon ne présente aucune ouverture. Comme les ouvertures sont indispensables, il s'agit d'évaluer et de réduire au minimum la perturbation qu'elles apportent, tout en conservant une valeur suffisante à la fraction du courant d'ions qui peut passer à travers le manchon. Si celui-ci est infiniment mince, le champ électrique est inaltéré et cette fraction est égale au rapport entre la surface des ouvertures et la surface totale du manchon dans la tranche horizontale qui contient exactement la fente-source F et l'électrode E.

La disposition d'ouvertures qui apporte la moindre perturbation dans le mouvement représenté par (6) et (7), parce qu'elle en conserve la symétrie cylindrique, est celle de fentes horizontales ff, disposées périodiquement, comme le représentent les figures 1 et 3, dans toute la hauteur occupée par la fente-source F et par l'électrode E. Ces fentes ne peuvent pas, naturellement, s'étendre sur toute la périphérie du manchon, mais on leur en fera occuper la plus grande partie possible en les disposant en groupes de grande longueur par rapport à la largeur de chacune d'elles et séparés par des parties pleines suffisantes pour assurer la tenue mécanique du manchon. C'est seulement entre les fentes que le gaz est entraîné par la surface du manchon avec la vitesse $v_0 = \omega b$ imposée à ce dernier par le mouvement de rotation. Il s'agit d'évaluer la perturbation introduite par la présence des fentes dans le mouvement du gaz et, plus particulièrement, la diminution qui peut en résulter dans la finesse du spectre des mobilités.

Étant donné que les différences $c - b$ et $b - a$ entre les rayons des cylindres sont assez faibles par rapport à ces rayons eux-mêmes, l'évaluation cherchée ne sera pas modifiée de manière importante si nous substituons au problème cylindrique le problème plan correspondant d'une grille plane,

composée de barreaux infiniment plats, tous de même largeur et équidistants (j'examinerai plus loin l'influence d'une épaisseur finie de ces barreaux sur le mouvement du gaz et sur la distribution du champ électrique) se mouvant parallèlement à la longueur des barreaux d'un mouvement uniforme de vitesse v_0 entre deux plans immobiles, parallèles à celui de la grille et placés à une même distance d de part et d'autre de celle-ci.

Dans le mouvement laminaire ainsi défini, la vitesse v en un point du gaz sera évidemment parallèle à celle de la grille et ne dépendra pas de la coordonnée d'espace dans cette même direction. Il suffira donc de connaître la distribution de v dans un plan P perpendiculaire à cette direction, c'est-à-dire à la longueur des barreaux. En vertu de la première des équations (2) qui s'applique évidemment ici, cette distribution satisfait à l'équation de Laplace et le problème se ramène à la recherche, dans le plan P considéré, d'une fonction harmonique s'annulant sur les deux droites AB et CD, intersection du plan P avec les plans parallèles immobiles et prenant la valeur v_0 sur les sections telles que MN, M'N', etc. (*fig.* 4) des barreaux de la grille par le plan P.

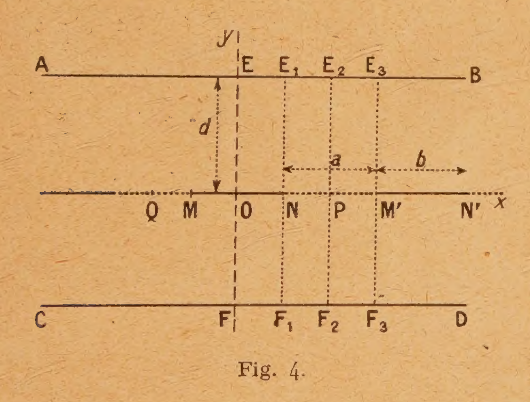


Fig. 4.

La grille est supposée se mouvoir perpendiculairement au plan de la figure avec la vitesse v_0. Dans le plan P de cette figure, prenons pour origine le milieu O de la section du barreau MN, pour axe des x la direction du plan P contenue dans le plan de la grille et pour axe des y la perpendiculaire à ce plan. Désignons par b la largeur de chaque barreau et par a la largeur des fentes qui séparent ces barreaux. Les formules que nous allons obtenir se simplifieront dans le cas représenté sur la figure où a est égal à b, cas que nous supposerons également réalisé dans l'appareil. Laissons, pour l'instant, a et b quelconques.

En raison de la structure périodique de la grille, la fonction cherchée v de x et de y doit être périodique en x avec la période $a + b$ et elle doit, en outre, être fonction paire de y pour tenir compte de la position symétrique occupée par la grille entre les plans fixes AB et CD.

Dans le cas où la distance d est supposée assez grande par rapport à la période $a + b$ (condition qui sera réalisée dans l'appareil) une première solution très simple nous sera fournie par application de la méthode des variables imaginaires ou de la représentation conforme.

On sait que si la variable complexe

$$Z = X + iY,$$

où X et Y sont des quantités réelles est une fonction analytique quelconque de la variable

$$z = x + iy,$$

les quantités conjuguées X et Y seront des fonctions harmoniques de x et y.

Pour simplifier nos formules ultérieures, posons, en conservant les notations de la figure 4

$$\left.\begin{array}{lll} \xi = \dfrac{\pi x}{a+b}, & \eta = \dfrac{\pi y}{a+b}, & \delta = \dfrac{\pi d}{a+b}, \\ \rho = \dfrac{b}{a+b}, & \zeta = \xi + i\eta, & \gamma = \sin\dfrac{\pi\rho}{2}. \end{array}\right\} \quad (22)$$

Il est remarquable que la fonction analytique Z de ζ et par conséquent de z, définie par la relation simple

$$\gamma \sin Z = \sin\zeta \quad (23)$$

fournisse la solution de notre problème.

Pour le montrer, traduisons la relation (23) dans le domaine réel par les deux équations qui lui sont équivalentes

$$\left.\begin{array}{l} \gamma \sin X \operatorname{ch} Y = \sin\xi \operatorname{ch}\eta, \\ \gamma \cos X \operatorname{sh} Y = \cos\xi \operatorname{sh}\eta, \end{array}\right\} \quad (24)$$

γ étant, d'après sa définition (22) une constante positive et inférieure à l'unité.

Nous examinerons plus particulièrement ce qui concerne la fonction Y définie à partir de ξ et η par l'équation suivante, obtenue en éliminant X entre les deux équations (24).

$$\frac{\sin^2\xi \operatorname{ch}^2\eta}{\operatorname{ch}^2 Y} + \frac{\cos^2\xi \operatorname{sh}^2\eta}{\operatorname{sh}^2 Y} = \gamma^2, \quad (25)$$

Il est facile de voir que cette équation, quels que soient ξ et η, donne pour $\operatorname{sh}^2 Y$ une et une seule valeur positive à laquelle correspondent, pour $\operatorname{sh} Y$ et par conséquent pour Y, deux valeurs égales et de signes contraires. Pour achever de définir la fonction Y, nous choisirons la détermination positive dont il est également facile de voir qu'elle représente une fonction continue de ξ et de η dans toute l'étendue du plan des ζ.

Il résulte de l'équation (25), qui ne change pas quand on y remplace ξ par $\pi + \xi$, que la fonction Y est périodique en ξ avec la période π et, par conséquent, périodique en x avec la période $a + b$. De même, l'équation (25) ne changeant pas quand on y remplace η par $-\eta$, notre fonction Y est paire en η et, par conséquent, en y.

Montrons que cette fonction s'annule sur les segments tels que MN, M'N', ... de l'axe des x (*fig.* 4), c'est-à-dire sur les barreaux de la grille sans s'annuler dans leurs intervalles, c'est-à-dire sur les segments tels que NM' de l'axe des x.

Pour tout point appartenant à l'un quelconque de ces segments de l'axe des x, y et par conséquent η sont nuls et l'équation (25) devient

$$\text{sh}^2 Y(\sin^2\xi - \gamma^2 \text{ch}^2 Y) = 0. \qquad (26)$$

Les abscisses x de M et N sont respectivement $-\frac{b}{2}$ et $+\frac{b}{2}$ et correspondent aux valeurs $-\frac{\pi\rho}{2}$ et $+\frac{\pi\rho}{2}$ de ξ ou $-\gamma$ et $+\gamma$ de $\sin\xi$ en vertu des notations (22). On voit facilement que pour tout point des segments tels que MN (barreaux), $\sin^2\xi$ est compris entre zéro et γ^2, tandis que pour tout point des segments tels que NM' (fentes), $\sin^2\xi$ est compris entre γ^2 et l'unité.

L'équation (26) montre que, dans le premier intervalle, $\text{ch}^2 Y$ étant toujours supérieur à l'unité, le second facteur du premier membre ne peut s'annuler et la seule solution possible est celle qui annule le premier facteur, c'est-à-dire

$$Y = 0.$$

Dans le second intervalle, au contraire, cette solution ne convient pas puisque, substituée avec $\eta = 0$ dans la première des équations (24) qui devient

$$\gamma \sin X = \sin\xi,$$

elle conduit à une impossibilité, $\sin\xi$ étant supérieur à γ en valeur absolue dans l'intervalle considéré et X devant être une quantité réelle.

On a donc nécessairement, dans cet intervalle à annuler le second facteur du premier membre de (26) et l'on obtient

$$\text{ch}^2 Y = \frac{1}{\gamma^2}\sin^2\xi,$$

correspondant pour Y à des valeurs qui varient depuis 0 aux points tels que N, M' (bords des fentes) jusqu'à un maximum Y_P aux points tels que P (milieux des fentes) donné par

$$\text{ch}\, Y_P = \frac{1}{\gamma}. \qquad (27)$$

Les caractères de la fonction Y ainsi obtenue apparaissent clairement sur la figure 5 qui traduit la correspondance établie par la relation (23) entre le plan des ζ et le demi-plan supérieur des Z (Y étant toujours positif) réalisant ainsi une représentation conforme de l'un sur l'autre.

La figure 5 correspond au cas particulier où a est égal à b et par conséquent ρ égal à $\frac{1}{2}$, d'où

$$\gamma = \sin\frac{\pi\rho}{2} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

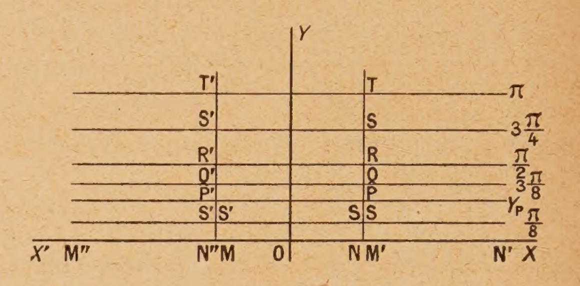
et, d'après (27),

$$\text{ch}\, Y_P = \sqrt{2}, \qquad Y_P = 0{,}88.$$

Les courbes tracées dans le plan des ζ sont les courbes

$$Y = \text{const.}$$

et correspondent aux droites horizontales du plan des Z. Elles sont tracées pour les valeurs croissantes de Y : $\frac{\pi}{8}$, Y_P, $\frac{3\pi}{8}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{4}$ et π.



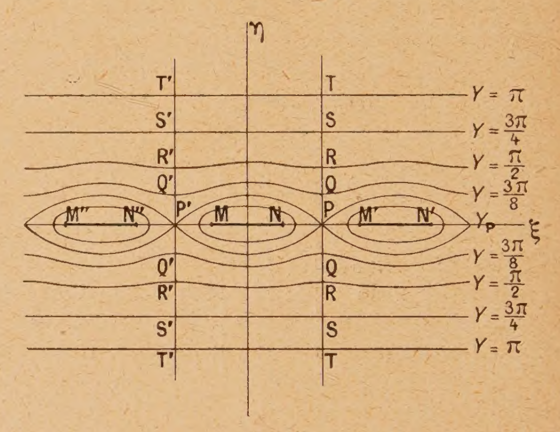


Fig. 5.

Les points homologues dans les deux plans des Z et des ζ sont indiqués par une même lettre. On voit que la transformation (23) dilate les segments MN, M'N', ... de l'axe des ξ (barreaux) et les place bout à bout pour en faire l'axe des X. En même temps, les segments tels que NM' (fentes) sont pliés en deux au point milieu P et relevés verticalement, les deux moitiés NP et PM' étant appliquées l'une sur l'autre.

Un caractère très net que fait ressortir la figure est que la déformation ou perturbation liée à l'existence des fentes diminue très rapidement quand on s'éloigne du plan de la grille et disparaît pratiquement à une distance de celle-ci qui est de l'ordre de la largeur des fentes. Alors que la courbe Q'Q qui correspond à la valeur $\frac{3\pi}{8}$ de Y est nettement ondulée, la courbe R'R pour Y égal à $\frac{\pi}{2}$ ne l'est plus que très faiblement et toute trace d'ondulation

disparaît, à l'échelle de la figure, sur S'S pour Y égal à $\frac{3\pi}{4}$. Cela signifie que les courbes

$$Y = \text{const.}$$

se transforment très rapidement, quand Y augmente, en courbes

$$\eta = \text{const.}$$

Ce fait peut se déduire directement de l'équation (25) qui, résolue par rapport à $\text{sh}^2 \eta$ donne

$$\text{sh}^2 \eta = \text{sh}^2 Y \frac{\gamma^2 \text{ch}^2 Y - \sin^2 \xi}{\text{ch}^2 Y - \sin^2 \xi}, \qquad (28)$$

$\text{ch}^2 Y$ augmente très rapidement avec Y tandis que $\sin^2 \xi$ est au maximum égal à l'unité et devient négligeable à partir d'une valeur suffisante de Y. Dans ces conditions, (28) donne

$$\text{sh}^2 \eta = \gamma^2 \text{sh}^2 Y,$$

relation qui tend, pour Y suffisamment grand, vers

$$Y = |\eta| - \text{L}\gamma \qquad (29)$$

$\text{L}\gamma$ étant le logarithme népérien de γ.

Dans le cas particulier de la figure, où γ est égal à $\frac{\sqrt{2}}{2}$, cette relation limite devient

$$Y = |\eta| + \text{L}\sqrt{2} = |\eta| + 0{,}34657.$$

Vitesse en un point du gaz. — Voyons maintenant comment la fonction harmonique Y définie par (25) nous permet de résoudre le problème de l'influence des fentes sur le mouvement du gaz. Posons

$$v = v_0 - CY$$

et déterminons la constante C de manière que v s'annule sur les plateaux AB et CD, pour $y = \pm d$, c'est-à-dire pour $\eta = \pm \delta$. Si δ est suffisamment grand, et nous avons vu qu'il lui suffit d'atteindre quelques unités, alors que dans l'appareil réalisé il est de l'ordre de 10, la relation (29) est applicable et C se trouve déterminé par la condition

$$0 = v_0 - C(\delta - \text{L}\gamma),$$

d'où, pour la solution de notre problème

$$v = v_0 \left(1 - \frac{Y}{\delta - \text{L}\gamma}\right), \qquad (30)$$

qui satisfait bien aux conditions imposées à v d'être une fonction harmonique prenant la valeur v_0 sur les barreaux de la grille ($Y = 0$) et s'annulant sur les plateaux AB et CD.

Les courbes de la figure 5 représentent ainsi les sections par le plan de la figure des surfaces cylindriques sur chacune desquelles v a une valeur constante.

Dans le plan de la grille, l'écart de la vitesse à partir de v_0 est maximum au milieu des fentes, en P par exemple et a pour valeur

$$v_0 - v_P = v_0 \frac{Y_P}{\delta - \text{L}\gamma}.$$

Dans l'appareil réalisé, δ est de l'ordre de 10, γ est égal à $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et nous avons trouvé, pour Y_P, la valeur 0,880; l'écart relatif maximum par rapport à v_0 prend ainsi la valeur

$$\frac{v_0 - v_P}{v_0} = \frac{0{,}880}{10 + \text{L}\sqrt{2}} = \frac{0{,}880}{10{,}346} = 0{,}085.$$

Déviation de la trajectoire. — Voyons maintenant l'effet de cette perturbation, localisée au voisinage des fentes, comme le montre la figure 5, sur le déplacement des ions. Dans le problème plan que nous avons substitué au problème cylindrique, le champ électrique entre les plateaux AB et CD, reste uniforme malgré l'existence des fentes si la grille est portée au potentiel moyen entre ceux de AB et CD.

La fente F source des ions, située dans le plateau CD et perpendiculaire aux fentes de la grille, se projette sur le plan P de la figure 4 suivant $FF_1F_2F_3$ et l'électrode E, située dans le plateau AB se projette sur le même plan suivant $EE_1E_2E_3$. La trajectoire d'un ion particulier, dont le point de départ se projette en F, par exemple, serait la ligne de force électrique FOE si le gaz était immobile. L'entraînement de celui-ci par le mouvement de la grille qui est perpendiculaire au plan de la figure aura pour effet de faire suivre à l'ion une trajectoire qui se projettera suivant FOE, mais dont l'extrémité E sera déplacée perpendiculairement au plan de la figure de la quantité

$$l = \int v \, dt = \frac{1}{kh} \int_{-d}^{+d} v \, dy = \frac{2}{kh} \int_0^d v \, dy \qquad (31)$$

v étant la vitesse d'entraînement du gaz au point d'ordonnée y sur la droite FE, h l'intensité du champ électrique uniforme et k la mobilité de l'ion sous l'action de ce champ.

L'ion n'arrivera d'ailleurs à l'électrode que si le point où sa trajectoire se présente pour traverser la grille tombe à l'intérieur d'une fente. Il en sera ainsi pour les trajectoires projetées entre F_1E_1 et F_3E_3. Les déplacements l ne seront pas les mêmes pour toutes ces trajectoires et leurs valeurs extrêmes l_1 et l_2 correspondront évidemment aux trajectoires F_1E_1 et F_2E_2 qui traversent une fente : la première à son bord N, la deuxième en son milieu P. Si v_1 et v_2 désignent respectivement les vitesses d'entraînement du gaz au point d'ordonnée y sur les droites F_1E_1 et F_2E_2, on aura, d'après (31),

$$l_1 = \frac{2}{kh} \int_0^d v_1 \, dy, \qquad l_2 = \frac{2}{kh} \int_0^d v_2 \, dy. \qquad (32)$$

C'est la différence $l_1 - l_2$ qui mesure la dispersion due à l'influence des fentes. Seule, sa valeur relative nous intéresse. Prenons pour terme de comparaison le déplacement l_0 que subirait l'ion si les fentes étaient infiniment étroites, c'est-à-dire si a tendait vers o. On a, dans ce cas, d'après les définitions (22)

$$\rho = 1, \qquad \gamma = \sin\frac{\pi\rho}{2} = 1, \qquad \mathrm{L}\gamma = 0$$

et la formule (30) devient, en tenant compte de (29)

$$v = v_0\left(1 - \frac{|\eta|}{\delta}\right),$$

ce qui concorde bien avec la solution simple

$$v = v_0\left(1 - \frac{|y|}{d}\right),$$

dans le cas où la grille est remplacée par un plan matériel déplacé avec la vitesse v_0 entre les deux plans fixes AB et CD. On a, dans ce cas, d'après (31),

$$l_0 = \frac{2}{kh}\int_0^d v_0\left(1 - \frac{y}{d}\right)\mathrm{d}y = \frac{v_0 d}{kh}. \qquad (33)$$

Désignons par Y_1 et Y_2 les valeurs que prend la fonction Y de η sur F_1E_1 et F_2E_2 respectivement (*fig.* 4) qui correspondent aux valeurs $\frac{\pi}{2}\rho$ et $\frac{\pi}{2}$ de ξ, c'est-à-dire aux valeurs γ et 1 de $\sin\xi$. On aura, d'après (22), (30) et (32),

$$l_1 - l_2 = \frac{2v_0}{kh(\delta - \mathrm{L}\gamma)}\int_0^d (Y_2 - Y_1)\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{2v_0(a+b)}{\pi kh(\delta - \mathrm{L}\gamma)}\int_0^\delta (Y_2 - Y_1)\,\mathrm{d}\eta.$$

d'où, d'après (33),

$$\frac{l_1 - l_2}{l_0} = \frac{2}{\delta(\delta - \mathrm{L}\gamma)}\int_0^\delta (Y_2 - Y_1)\,\mathrm{d}\eta. \qquad (34)$$

Les fonctions Y_2 et Y_1 de η s'obtiennent à partir de (25) en y donnant à $\sin^2\xi$ les valeurs 1 et γ^2 respectivement. On obtient ainsi

$$\mathrm{ch}\,Y_2 = \frac{1}{\gamma}\mathrm{ch}\,\eta,$$

$$\mathrm{sh}^2 Y_1 = \frac{\mathrm{sh}\,\eta\left(\mathrm{sh}\,\eta + \sqrt{\mathrm{sh}^2\eta + 4\gamma^2(1-\gamma^2)}\right)}{2\gamma^2}.$$

Quand b est égal à a et γ égal à $\frac{\sqrt{2}}{2}$, ces expressions deviennent

$$\mathrm{ch}\,Y_2 = \sqrt{2}\,\mathrm{ch}\,\eta, \qquad \mathrm{sh}^2 Y_1 = \mathrm{sh}\,\eta(\mathrm{sh}\,\eta - \mathrm{ch}\,\eta) \qquad (35)$$

et la dispersion relative (34)

$$\frac{l_1 - l_2}{l_0} = \frac{2}{\delta(\delta + \mathrm{L}\sqrt{2})}\int_0^\delta (Y_2 - Y_1)\,\mathrm{d}\eta. \qquad (36)$$

Il résulte des définitions (35) que $Y_2 - Y_1$ tend très rapidement vers zéro quand η augmente, de sorte que l'intégrale figurant dans (36) ne dépend sensiblement pas de sa limite supérieure δ dès que celle-ci dépasse quelques unités. Cette valeur limite de l'intégrale, facile à calculer par intégration graphique, est sensiblement égale à 0,314, de sorte que

$$\frac{l_1 - l_2}{l_0} = \frac{0{,}628}{\delta(\delta + \mathrm{L}\sqrt{2})}, \qquad \int_0^\delta (v_1 - v_2)\,\mathrm{d}\eta = \frac{0{,}314}{\delta + \mathrm{L}\sqrt{2}}.$$

Pour δ voisin de 10, cette valeur de la dispersion relative introduite par la largeur finie de fentes égales aux intervalles plans qui les séparent se montre ainsi inférieure au centième, c'est-à-dire à l'ordre que nous nous sommes fixé pour la finesse du spectre des mobilités.

Manuscrit reçu le 20 février 1949.

LES CHAMPS POTENTIELS ET LA TRANSFORMATION DE JAUGE GÉNÉRALISÉE EN THÉORIE DES CORPUSCULES A SPIN

Par Bernard KWAL.

Institut Henri Poincaré, Paris.

Sommaire. — Les fonctions d'onde des corpuscules à spin en présence des sources admettent des champs potentiels et des transformations généralisées de jauge. Dans le cas le plus général, les sources, les champs, les potentiels et les fonctions génératrices de la transformation de jauge sont représentées par des complexes homologues des grandeurs spinorielles. Le nombre de composantes du champs potentiel est commandé par le nombre de composantes du champ de sources. Le cas du corpuscule de spin 1 est étudié en détail et l'on montre que le champ quadrivectoriel qu'il est nécessaire d'adjoindre au champ d'un tenseur antisymétrique pour la description correcte du corpuscule de spin 1 n'a rien de commun avec le potentiel-vecteur de la théorie de Maxwell. Les deux champs dérivent d'un champ potentiel, grandeur distincte, dont une partie se réduit au potentiel-vecteur de Maxwell lorsque la masse du corpuscule de spin 1 devient nulle à la limite. La description d'un photon de masse au repos nulle exige donc l'emploi d'un champ à 10 composantes.

L'étude des équations du meson chargé, en présence du champ extérieur, peut être également faite à l'aide des champs potentiels.

1. Introduction. — On sait que les équations de Maxwell

$$\partial^j h_{jk} = c_k, \qquad \partial_{[j} h_{lk]} = 0 \tag{1}$$

admettent un potentiel-quadrivecteur a_j

$$h_{jk} = \partial_j a_k - \partial_k a_j, \qquad \partial^j a_j = 0, \qquad \partial^j \partial_j a_k = c_k \tag{2}$$

et gardent l'invariance au regard de la transformation

$$a_j = a'_j + \partial_j \varphi, \qquad \partial^j \partial_j \varphi = 0 \tag{3}$$

dite de « jauge » pour des raisons qui se font jour dans la théorie unitaire de Weyl.

La théorie des corpuscules à spin, bien qu'elle relève d'un domaine différent, celui des champs microscopiques de la théorie quantique des corpuscules fondamentaux, nous met en présence d'un ensemble d'équations différentielles linéaires dont la structure mathématique est fort semblable à celle des équations de Maxwell, qui se rattachent d'ailleurs intimement à la théorie du corpuscule de spin 1. On est donc en droit de se demander si la propriété caractéristique des équations de Maxwell d'admettre des champs-potentiels et d'être insensibles vis-à-vis de la transformation de jauge, se retrouvent dans la théorie générale des corpuscules à spin.

Avant d'aller plus loin, notons que si le champ de sources du champ électromagnétique avait la variance d'un pseudo-quadrivecteur $C_{[jkl]}$, c'est-à-dire que si à la place de (1) on avait

$$\partial^j h_{jk} = 0, \qquad \partial_{[j} h_{kl]} = c_{[jkl]}. \tag{1'}$$

alors il eût fallu introduire un champ-potentiel de variance pseudo-quadrivectorielle $a_{[jkl]}$, satisfaisant aux relations suivantes

$$h_{jk} = \partial^l a_{[jkl]}, \qquad \partial_{[m} a_{jkl]} = 0, \qquad \partial^m \partial_m a_{[jkl]} = c_{[jkl]}. \tag{2'}$$

avec une transformation de jauge mettant en jeu une fonction génératrice $\varphi_{[jklm]}$ de variance pseudo-scalaire

$$a_{[jkl]} = \partial^m \varphi_{[jklm]}, \qquad \partial^n \partial_n \varphi_{[jklm]} = 0. \tag{3'}$$

(Nous écrivons ∂_j pour $\dfrac{\partial}{\partial x_j}$, et $\partial_{[j} h_{lk]}$ pour

$$\partial_i h_{lk} + \partial_l h_{kj} + \partial_k h_{jl} \quad \text{et} \quad x = \frac{2\pi mci}{h}\Big).$$

2. Le cas du corpuscule de spin 1/2. — En notation spinorielle les équations du corpuscule de spin 1/2, les équations de Dirac, s'écrivent

$$\mathcal{D}^{\beta\alpha} \xi_\alpha = x \eta^\beta, \qquad \mathcal{D}_{\alpha\beta} \eta^\beta = x \xi_\alpha \tag{4}$$

avec

$$\mathcal{D}^{\beta\alpha} = \partial^{\beta\alpha} + \varepsilon \mathcal{A}^{\beta\alpha}, \qquad \partial^{\beta\alpha} = \begin{vmatrix} \partial_t - \partial_z & \partial_x + i\partial_y \\ \partial_x - i\partial_y & \partial_t + \partial_z \end{vmatrix}. \tag{5}$$

En l'absence du champ extérieur et pour un corpuscule de masse au repos nulle ($x = 0$), on a, à la place de (4), les équations

$$\partial^{\beta\alpha} \xi_\alpha = 0, \qquad \partial_{\alpha\beta} \eta^\beta = 0 \tag{6}$$

qui doivent être considérées ensemble, si l'on veut introduire d'une manière correcte les quadri-vecteurs de courant et de spin, relatifs à ce corpuscule.

Dans le cas d'équations (6), l'introduction du champ potentiel se fait d'une manière très simple;

il suffit, en effet, de poser

$$\xi_\alpha = \partial_{\alpha\beta}\eta'^\beta, \qquad \eta^\beta = \partial^{\beta\alpha}\xi'_\alpha. \tag{7}$$

avec

$$\left.\begin{array}{l} \partial^{\beta_1\alpha}\partial_{\alpha\beta_2}\eta'^{\beta_2} = 0, \qquad \partial_{\alpha_1\beta}\partial^{\beta\alpha_2}\xi'_{\alpha_2} = 0, \\ \partial^{\beta_1\alpha}\partial_{\alpha\beta_2} = \delta^{\beta_1}{}_{\beta_2}\square = \delta^{\beta_1}{}_{\beta_2}(\partial_t^2 - \partial_x^2 - \partial_y^2 - \partial_z^2), \\ \partial_{\alpha_1\beta}\partial^{\beta\alpha_2} = \delta_{\alpha_1}{}^{\alpha_2}\square = \delta_{\alpha_1}{}^{\alpha_2}(\partial_t^2 - \partial_x^2 - \partial_y^2 - \partial_z^2), \end{array}\right\} \tag{8}$$

et qui admettent la transformation de jauge

$$\xi'_\alpha = \xi''_\alpha + \partial_{\alpha\beta}\bar{\eta}^\beta, \qquad \eta'^\beta = \eta''^\beta + \partial^{\beta\alpha}\bar{\xi}_\alpha. \tag{9}$$

les fonctions génératrices de la transformation $\bar{\xi}_\alpha$ et $\bar{\eta}^\beta$ devant satisfaire les équations (8). Comme on voit, dans le cas du corpuscule de spin 1/2, les champs, les champs-potentiels et les champs générateurs de la transformation de jauge, ont la même variance spinorielles et le même nombre de composantes relativistes. Nous retrouverons cette circonstance dans le cas général d'un corpuscule à spin quelconque.

Pour un corpuscule massif, décrit par l'équation

$$\partial^{\beta\alpha}\xi_\alpha = x\eta^\beta, \qquad \partial_{\alpha\beta}\eta^\beta = x\xi_\alpha; \tag{10}$$

on posera

$$\left.\begin{array}{ll} \xi_\alpha = \partial_{\alpha\beta}\eta'^\beta + x\xi'_\alpha, & \eta^\beta = \partial^{\beta\alpha}\xi'_\alpha + x\eta'^\beta, \\ \square\eta'^\beta = x^2\eta'^\beta. & \square\xi'_\alpha = x^2\xi'_\alpha. \end{array}\right\} \tag{11}$$

Enfin, dans le cas général des équations (4) corpuscule massif et chargé, en présence d'un champ extérieur, dérivant d'un potentiel-quadrivecteur $\mathcal{A}^{\alpha\beta}$, on doit poser

$$\left.\begin{array}{ll} \xi_\alpha = \mathcal{D}_{\alpha\beta}\eta'^\beta + x\xi'^\alpha. & \eta^\beta = \mathcal{D}^{\alpha\beta}\xi'_\alpha + x\eta'^\beta, \\ \mathcal{D}^{\beta_1\alpha}\mathcal{D}_{\alpha\beta_2}\eta'^{\beta_2} = x^2\eta'^{\beta_1}, & \mathcal{D}_{\alpha_1\beta}\mathcal{D}^{\beta\alpha_2}\xi_{\alpha_2} = x^2\xi_{\alpha_1}, \end{array}\right\} \tag{12}$$

et les équations relatives à la transformation de jauge prennent la forme

$$\left.\begin{array}{ll} \eta'^\beta = \eta''^\beta + \mathcal{D}^{\beta\alpha}\bar{\xi}_\alpha - x\bar{\eta}^\beta, & \xi'_\alpha = \xi''_\alpha + \mathcal{D}_{\alpha\beta}\eta^\beta - x\bar{\xi}_\alpha, \\ \mathcal{D}^{\beta_1\alpha}\mathcal{D}_{\alpha\beta_2}\bar{\eta}^{\beta_2} = x^2\bar{\eta}^{\beta_1}, & \mathcal{D}_{\alpha_1\beta}\mathcal{D}^{\beta\alpha_2}\bar{\xi}_{\alpha_2} = x^2\bar{\xi}_{\alpha_1}. \end{array}\right\} \tag{13}$$

Nous allons récrire les équations (4), (12) et (13) en se servant de la représentation algébrique, en usage dans la théorie de l'équation de Dirac

$$\left.\begin{array}{ll} (\gamma_i D^i - x)\psi = 0, & D^i = \partial^i + \varepsilon\mathcal{A}^i \quad (i = 1, 2, 3, 4). \\ \gamma_i\gamma_j + \gamma_j\gamma_i = 2\delta_{ij}, & D^i D^j - D^j D^i = \varepsilon\mathcal{H}^{ij}. \end{array}\right\} \tag{4'}$$

$$\left.\begin{array}{l} \psi = (\gamma_j D^j + x)\psi', \qquad (\gamma_i\gamma_j D^i D^j - x^2)\psi' = 0 \\ \text{ou} \\ \left(D^i D_i + \frac{\varepsilon}{2}\gamma_i\gamma_j\mathcal{H}^{ij} - x^2\right)\psi' = 0. \end{array}\right\} \tag{12'}$$

$$\left.\begin{array}{l} \psi' = \psi'' + (\gamma_k D^k - x)\Phi, \\ \left(D^i D_i + \frac{\varepsilon}{2}\gamma_i\gamma_j\mathcal{H}^{ij} - x^2\right)\psi' = 0. \end{array}\right\} \tag{13'}$$

3. **Le cas du corpuscule de spin 1.** — Nous allons tout d'abord traiter ce cas, en prenant le système global, non-réduit, d'équations du corpuscule de spin 1, ce qui permet d'étudier à la fois le corpuscule maxwellien C_1^1 et le corpuscule non maxwellien C_0^1, la séparation des équations s'effectuant dans le stade final des raisonnements. Nous écrirons ces équations (en l'absence du champ extérieur) en notation spinorielle, de la manière que voici [1], [2].

$$\left.\begin{array}{ll} \partial^{\beta_1\alpha_1}\xi_{\alpha_1\alpha_2} - x\,\xi^{\beta_1}{}_{\alpha_2} = \rho^{\beta_1}{}_{\alpha_2}, & \partial_{\alpha_1\beta_1}\xi^{\beta_1}{}_{\alpha_2} - x\,\xi_{\alpha_1\alpha_2} = \rho_{\alpha_1\alpha_2}, \\ \partial^{\beta_2\alpha_2}\xi_{\alpha_1\alpha_2} \mp x\,\eta_{\alpha_1}{}^{\beta_2} = \bar{\rho}_{\alpha_1}{}^{\beta_2}, & \partial^{\beta_2\alpha_2}\xi^{\beta_1}{}_{\alpha_2} \pm x\,\eta^{\beta_1\beta_2} = \bar{\rho}^{\beta_1\beta_2}, \\ \partial^{\beta_1\alpha_1}\eta_{\alpha_1}{}^{\beta_2} - x\,\eta^{\beta_1\beta_2} = \bar{\rho}^{\beta_1\beta_2}, & \partial_{\alpha_1\beta_1}\eta^{\beta_1\beta_2} - x\,\eta_{\alpha_1}{}^{\beta_2} = \bar{\rho}_{\alpha_1}{}^{\beta_2}, \\ \partial_{\alpha_2\beta_2}\eta_{\alpha_1}{}^{\beta_2} \mp x\,\xi_{\alpha_1\alpha_2} = \rho_{\alpha_1\alpha_2}, & \partial_{\alpha_2\beta_2}\eta^{\beta_1\beta_2} \mp x\,\xi^{\beta_1}{}_{\alpha_2} = \rho^{\beta_1}{}_{\alpha_2}. \end{array}\right\} \tag{14}$$

Dans ces équations les spineurs $\rho_{\alpha_1\alpha_2}$, $\rho^{\beta_1}{}_{\alpha_2}$, $\bar{\rho}_{\alpha_1}{}^{\beta_2}$, $\bar{\rho}^{\beta_1\beta_2}$ représentent le champ des sources qui donnent naissance au champ du corpuscule de spin 1, qui figure dans les membres de gauche des équations. Comme on le voit, le champ des sources a, dans le cas général, la même variance et le même nombre de composantes que le champ qu'il engendre. *Quant au choix du signe + dans quatre équations sur huit, il conduit à la formation des équations duales.*

Pour les équations (14) nous pouvons définir le champ potentiel π, de la manière suivante :

$$\left.\begin{array}{l} \xi_{\alpha_1\alpha_2} = \partial_{\alpha_1\beta_1}\pi^{\beta_1}{}_{\alpha_2} + x\,\pi_{\alpha_1\alpha_2} = \pm\partial_{\alpha_2\beta_2}\bar{\pi}_{\alpha_1}{}^{\beta_2} + x\,\pi_{\alpha_1\alpha_2}, \\ \xi^{\beta_1}{}_{\alpha_2} = \partial^{\beta_1\alpha_1}\pi_{\alpha_1\alpha_2} + x\,\pi^{\beta_1}{}_{\alpha_2} = \pm\partial_{\alpha_2\beta_2}\bar{\pi}^{\beta_1\beta_2} + x\,\pi^{\beta_1}{}_{\alpha_2}, \\ \eta_{\alpha_1}{}^{\beta_2} = \pm\partial^{\beta_2\alpha_2}\pi_{\alpha_1\alpha_2} + x\,\bar{\pi}_{\alpha_1}{}^{\beta_2} = \partial_{\alpha_1\beta_1}\bar{\pi}^{\beta_1\beta_2} + x\,\bar{\pi}_{\alpha_1}{}^{\beta_2}, \\ \eta^{\beta_1\beta_2} = \pm\partial^{\beta_2\alpha_2}\pi^{\beta_1}{}_{\alpha_2} + x\,\bar{\pi}^{\beta_1\beta_2} = \partial^{\beta_1\alpha_1}\bar{\pi}_{\alpha_1}{}^{\beta_2} + x\,\bar{\pi}^{\beta_1\beta_2}, \end{array}\right\} \tag{15}$$

avec

$$\partial^{\beta_2\alpha_1}\partial_{\alpha_1\beta_1}\pi^{\beta_1}{}_{\alpha_2} - x^2\pi^{\beta_1}{}_{\alpha_2} = \rho^{\beta_2}{}_{\alpha_2}, \quad \ldots \tag{16}$$

et les équations de compatibilité

$$\partial_{\alpha_1\beta_1}\pi^{\beta_1}{}_{\alpha_2} \mp \partial_{\alpha_2\beta_2}\bar{\pi}_{\alpha_1}{}^{\beta_2} = 0, \quad \ldots \tag{17}$$

Quant aux équations, définissant la transformation généralisée de jauge, elles prennent la forme que voici

$$\left.\begin{array}{l} \pi^{\beta_1}{}_{\alpha_2} = \pi'^{\beta_1}{}_{\alpha_2} + \partial^{\beta_1\alpha_1}\Phi_{\alpha_1\alpha_2} - x\,\Phi^{\beta_1}{}_{\alpha_2} \\ \quad = \pm\,\pi'^{\beta_1}{}_{\alpha_2} + \partial_{\alpha_2\beta_2}\bar{\Phi}^{\beta_1\beta_2} - x\,\Phi^{\beta_1}{}_{\beta_2}, \\ \partial^{\beta_2\alpha_1}\partial_{\alpha_1\beta_1}\Phi^{\beta_1}{}_{\alpha_2} - x^2\Phi^{\beta_2}{}_{\alpha_2} = 0, \\ \partial_{\alpha_1\beta_1}\Phi^{\beta_1}{}_{\alpha_2} \mp \partial_{\alpha_2\beta_2}\bar{\Phi}_{\alpha_1}{}^{\beta_2} = 0. \end{array}\right\} \tag{18}$$

Passons maintenant aux équations réduites, en nous servant de la notation tensorielle. Chacun des quatre champs des spineurs de second rang (ξ, η), $(\rho, \bar{\rho})$, $(x, \bar{\pi})$ et $(\Phi, \bar{\Phi})$ donne naissance à deux groupes de tenseurs, le groupe maxwellien (h_{jk}, a_k), (C_{jk}, C_k), (P_{jk}, P_h), (Φ_{jk}, Φ_h) et un groupe non-maxwellien $(b_{[jkl]}, b_{[jklm]})$, (C_{jkl}, C_{jklm}), (P_{jkl}, P_{jklm}), $(\Phi_{jkl}, \Phi_{jklm})$. Dans ce qui suit les

[1] B. Kwal, *Archives des Sc. Phys, et Nat.*, Genève, 1944, **26**, p. 13.

[2] B. Kwal, Recherches sur la Mécanique ondulatoire Relativiste des corpuscules Élémentaires, Paris, 1946.

grandeurs étoilées sont obtenues par une correspondance duale.

a. Équations du champ en présence des sources

$$
\left.\begin{array}{ll}
{}^{1}_{1}\left\{\begin{array}{l}
\partial^j h_{jk} - x a_k = c_k, \qquad \partial_{[l} h_{jk]} = 0. \\
\partial_j a_k - \partial_k a_j - x h_{jk} = c_{jk}, \qquad \partial^j a_j = 0;
\end{array}\right. \\
{}^{\star 1}_{1}\left\{\begin{array}{l}
\partial^j h^\star_{jk} = 0, \qquad \partial_{[l} h^\star_{jk]} - x a^\star_{ljk} = c^\star_{ljk}, \\
\partial^j a^\star_{jkl} - x h^\star_{jk} = c^\star_{jk}, \qquad \partial_{[m} a^\star_{jkl]} = 0;
\end{array}\right. \\
{}^{1}_{0}\left\{\begin{array}{l}
\partial^j b_{jkl} = 0, \qquad \partial_{[m} b_{jkl]} = x b_{mjkl} = c_{mjkl}, \\
\partial^m b_{mjkl} - x b_{jkl} = c_{jkl};
\end{array}\right. \\
{}^{\star 1}_{0}\left\{\begin{array}{l}
\partial^j b^\star_j - x b^\star = c^\star, \qquad \partial_j b^\star_l - \partial_l b^\star_j = 0, \\
\partial_j b^\star - x b^\star_j = c^\star_j.
\end{array}\right.
\end{array}\right\} \quad (19^a)
$$

b. Équation des champs potentiels

$$
\left.\begin{array}{ll}
{}^{1}_{1}\left\{\begin{array}{l}
a_k = \partial^j P_{jk} + x P_k, \quad h_{jk} = \partial_j P_k - \partial_k P_j + x P_{jk}, \\
\left.\begin{array}{l}(\partial^j \partial_j - x^2) P_k = c_k, \qquad \partial^j P_j = 0 \\
(\partial^j \partial_j - x^2) P_{kl} = c_{kl}, \quad \partial_{[l} P_{jk]} = 0\end{array}\right\} \text{équations de compatibilité}
\end{array}\right. \\
{}^{\star 1}_{1}\left\{\begin{array}{l}
c^\star_{jkl} = \partial_{[j} P^\star_{kl]} + x P^\star_{jkl}, \qquad h^\star_{jk} = \partial^l P^\star_{jkl} + x P^\star_{jk}, \\
(\partial^m \partial_m - x^2) P^\star_{jk} = c^\star_{jk}, \qquad \partial^j P^\star_{jk} = 0, \\
(\partial^m \partial_m - x^2) P^\star_{jkl} = c^\star_{jkl}, \qquad \partial_{[m} P^\star_{jkl]} = 0;
\end{array}\right. \\
{}^{1}_{0}\left\{\begin{array}{l}
b_{jkl} = \partial^m P_{jklm} + x P_{jkl}, \\
b_{jklm} = \partial_{[m} P_{jkl]} + x P_{jklm}, \\
(\partial^n \partial_n - x^2) P_{jkl} = c_{jkl}, \qquad \partial^l P_{jkl} = 0, \\
(\partial^n \partial_n - x^2) P_{jklm} = c_{jklm};
\end{array}\right. \\
{}^{\star 1}_{0}\left\{\begin{array}{l}
b^\star_j = \partial_j P^\star + x P^\star_j, \qquad b^\star = \partial^j P^\star_j + x P^\star, \\
(\partial^n \partial_n - x^2) P^\star_j = 0, \qquad (\partial^n \partial_n - x^2) P^\star = 0. \\
\partial_k P^\star_j - \partial_j P^\star_k = 0.
\end{array}\right.
\end{array}\right\} \quad (19^b)
$$

c. Équations relatives aux transformations de jauge

$$
\left.\begin{array}{ll}
{}^{1}_{1}\left\{\begin{array}{l}
P_k = P'_k + \partial^l \Phi_{lk} - x \Phi_k, \\
P_{jk} = P'_{jk} + \partial_j \Phi_k - \partial_k \Phi_j - x \Phi_{jk}, \\
(\partial^n \partial_n - x^2) \Phi_k = (\partial^n \partial_n - x^2) \Phi_{lk} = 0, \\
\partial^l \Phi_l = 0, \qquad \partial_{[j} \Phi_{kl]} = 0;
\end{array}\right. \\
{}^{\star 1}_{1}\left\{\begin{array}{l}
P^\star_{jk} = P'^\star_{jk} + \partial^l \Phi^\star_{jkl} - x \Phi^\star_{jk}, \\
P^\star_{jkl} = P'^\star_{jkl} + \partial_{[j} \Phi^\star_{kl]} - x \Phi^\star_{jkl}, \\
(\partial^n \partial_n - x^2) \Phi^\star_{jk} = (\partial^n \partial_n - x^2) \Phi^\star_{jkl} = 0, \\
\partial^j \Phi^\star_{jk} = 0, \qquad \partial_m \Phi^\star_{jklm} = 0;
\end{array}\right. \\
{}^{1}_{0}\left\{\begin{array}{l}
P_{jkl} = P'_{jkl} + \partial^m \Phi_{jklm} - x \Phi_{jkl}, \\
P_{jklm} = P'_{jklm} + \partial_{[m} \Phi_{jkl]} - x \Phi_{jklm}, \\
(\partial^n \partial_n - x^2) \Phi_{jkl} = (\partial^n \partial_n - x^2) \Phi_{jklm} = 0, \\
\partial^l \Phi_{jkl} = 0;
\end{array}\right. \\
{}^{\star 1}_{0}\left\{\begin{array}{l}
P^\star_j = P'^\star_j + \partial_j \Phi^\star - x \Phi^\star_j, \\
P^\star = P'^\star + \partial^j \Phi^\star_j - x \Phi^\star, \\
(\partial^n \partial_n - x^2) \Phi^\star_j = (\partial^n \partial_n - x^2) \Phi^\star = 0, \\
\partial_j \Phi^\star_k - \partial_k \Phi^\star_j = 0.
\end{array}\right.
\end{array}\right\} \quad (19^c)
$$

4. **Remarques au sujet des champs des corpuscules limites.** — Les équations des corpuscules limites s'obtiennent en posant $x = 0$. Dans le cas du corpuscule C_1^1 qui est à la base de la mécanique ondulatoire du photon de M. L. de Broglie, d'une part, et à la base de la théorie du méson vectoriel, d'autre part, on obtient

$$
\left.\begin{array}{ll}
\partial^j h_{jk} = c_k, & \partial_{[l} h_{jk]} = 0, \\
\partial_j a_k - \partial_k a_j = c_{jk}, & \partial^j a_j = 0
\end{array}\right\} \quad (20)
$$

avec les conditions de compatibilité pour les sources (que nous n'avons pas écrites précédemment)

$$
\partial^k c_k = 0, \qquad \partial_{[l} c_{jk]} = 0 \quad (21)
$$

et les équations des champs potentiels

$$
\left.\begin{array}{ll}
h_{jk} = \partial_j P_k - \partial_k P_j, & a_k = \partial^j P_{jk}, \\
(\partial^j \partial_j - x^2) P_k = c_k, & \partial^j P_j = 0, \\
(\partial^j \partial_j - x^2) P_{kl} = c_{kl}, & \partial_{[l} P_{jk]} = 0.
\end{array}\right\} \quad (22)
$$

Ces équations montrent clairement que les grandeurs a_k qui interviennent dans la théorie de M. L. de Broglie et dans celle du méson vectoriel n'ont rien à faire avec les champs potentiels. Ce sont les champs au même titre que les b_{jk}, nécessaires pour une description correcte d'un corpuscule de spin 1, même de masse au repos nulle. (Il est de même nécessaire dans la théorie du corpuscule chargé de spin 1/2, de garder les deux champs spinoriels ξ_α et η^β, bien qu'ils se séparent également lorsqu'on pose $x = 0$.)

Il est donc possible à notre avis de fonder la mécanique ondulatoire du photon de masse au repos nulle, à condition de prendre comme base de la théorie les équations (20). La théorie complète nécessite l'emploi simultané des équations du corpuscule limite du type C_1^0, car le champ des sources du champ photonique à l'échelle de l'électron ne se réduit certainement pas au seul quadrivecteur densité de courant et de charge, comme il appert de l'étude du champ multitensoriel créé par une transition de l'électron de Dirac.

Quant à la nécessité de conserver l'ensemble d'équations C_1^1 pour le photon, même de masse au repos nulle, et en l'absence des sources, cela résulte du fait qu'à cette condition seule, il est possible de définir le pseudo-quadrivecteur de spin du photon, en utilisant l'expression $a_j\, h_{hl}$. La théorie quantique du champ électromagnétique qui s'appuie uniquement sur les équations de Maxwell pour fonder une théorie quantique du champ photonique d'interaction entre les particules chargées, semble donc, de ce point de vue du moins, d'avance vouée à l'insuccès.

5. **Le cas du champ dual des sources.** — En changeant le signe des 8 spineurs sur 16 dans les membres à droite des équations, nous aboutissons aux équations d'onde dans lequel intervient le

champ dual des sources. Nous nous contenterons d'écrire les équations relatives aux corpuscules C_1^1 et C_0^1, la déduction de celles relatives aux $C_1^{\star 1}$ et $C_0^{\star 1}$ se faisant de la même manière et sans aucune difficulté.

a'. Équations du champ en présence des sources duales

$$\left.\begin{array}{ll} C_1'^1 \left\{ \begin{array}{l} \partial^j h_{jk} - x a_k = c_k^\star, \quad \partial_{[l} h_{jk]} = 0, \\ \partial_j a_k - \partial_k a_j - x h_{jk} = 0, \quad \partial^j a_j = c^\star; \end{array} \right. \\ C_0'^1 \left\{ \begin{array}{l} \partial^j b_{jkl} = c_{kl}^\star, \quad \partial_{[m} b_{jkl]} - x b_{mjkl} = 0, \\ \partial^m b_{mjkl} - x b_{jkl} = c_{jkl}^\star. \end{array} \right. \end{array} \right\} \quad (19^{a'})$$

b'. Équations des champs potentiels

$$\left.\begin{array}{ll} C_1'^1 \left\{ \begin{array}{l} a_k = \partial^k P + x P_k, \quad h_{jk} = \partial_k P_j - \partial_j P_k, \\ (\partial^n \partial_n - x^2) \left\{ \begin{array}{l} P_k = c_k^\star, \\ P = c^\star, \end{array} \right. \quad \partial^k P_k + x P = 0; \end{array} \right. \\ C_0'^1 \left\{ \begin{array}{l} b_{jkl} = \partial_{[j} P_{kl]} + x P_{jkl}, \quad b_{jklm} = \partial_{[m} P_{jkl]}, \\ (\partial^n \partial_n - x^2) \left\{ \begin{array}{l} P_{kl} = c_{kl}^\star, \\ P_{jkl} = c_{jkl}^\star, \end{array} \right. \quad \partial^j P_{jkl} + x P_{kl} = 0. \end{array} \right. \end{array} \right\} \quad (19^{b'})$$

c'. Équations relatives aux transformations de jauge

$$\left.\begin{array}{ll} C_1'^1 \left\{ \begin{array}{l} P'_k = P'_k + \partial^j \varphi_{jk} - x \varphi_k; \quad P = P' + \partial^k \varphi_k, \\ (\partial^j \partial_j - x^2) \left\{ \begin{array}{l} \varphi_{jk} = 0, \\ \varphi_k = 0. \end{array} \right. \quad \partial_{[l} \varphi_{jk]} = 0; \end{array} \right. \\ C_0'^1 \left\{ \begin{array}{l} P_{kl} = P'_{kl} + \partial^j \varphi_{jkl}, \\ P_{jkl} = P'_{jkl} + \partial^m \varphi_{mjkl} - x \varphi_{jkl}, \\ (\partial^n \partial_n - x^2) \left\{ \begin{array}{l} \varphi_{jkl} = 0, \\ \varphi_{jklm} = 0, \end{array} \right. \quad \partial_{[m} \varphi_{jkl]} - x \varphi_{jklm} = 0. \end{array} \right. \end{array} \right\} \quad (19^{c'})$$

6. **Emploi de la cinquième coordonnée.** — Les mêmes grandeurs spinorielles représentent le groupe de Lotentz aussi bien dans l'espace à 4 qu'à 5 dimensions. C'est un cas particulier d'un théorème général de E. Cartan (³). L'emploi de la cinquième coordonnée se trouve ainsi justifié mathématiquement et présente l'intérêt dans l'écriture plus condensée des équations écrites précédemment. Il rend d'autre part intuitifs et immédiats certains résultats auxquels nous sommes parvenus. Ainsi les équations C_1^1 du corpuscule de spin 1 prenant la forme d'équation de Maxwell dans l'espace à cinq dimensions, l'existence d'un champ potentiel et de l'invariance de jauge correspondante, deviennent des choses évidentes, car ce sont là des propriétés caractéristiques des équations de Maxwell, indépendantes du nombre de dimensions de l'espace dans lequel on les écrit sous la forme tensorielle.

(³) E. Cartan, *Bull. Soc. Math. de France*, 1913, **41**, p. 53.

Nous allons donc introduire la cinquième coordonnée x_5, en convenant que la dérivation $\frac{\partial}{\partial x_5}$ se réduit à la multiplication par $x = \frac{2\pi mci}{h}$.

Dans ces conditions le pentavecteur W_a pourra représenter un quadrivecteur V_i et un scalaire V; le tenseur antisymétrique $W_{ab} = -W_{ba}$, à 10 composantes, un tenseur antisymétrique de l'espace-temps $V_{ij} = -V_{ji}$ et un quadrivecteur V_i, ce dernier correspondant à V_{i5}; le tenseur $W_{[abc]} = -W_{[bac]} = -W_{[cba]}$, antisymétrique également à 10 composantes, un tenseur V_{ij}, correspondant à W_{ij5} et un quadrivecteur V_i; le tenseur complètement antisymétrique $W_{[abcd]}$ à 5 composantes, un quadrivecteur et un scalaire. Cela étant, les équations des groupes (a), (b) et (c) prennent la forme suivante :

$$\left.\begin{array}{l} C_1^1 \left\{ \begin{array}{l} \partial^a h_{abc} = c_{bc}, \quad \partial_{[d} h_{abc]} = 0, \\ h_{abc} = \partial_{[a} P_{bc]}, \quad \partial^a P_{ab} = 0, \quad \partial^a \partial_a P_{bc} = c_{bc}; \\ P_{bc} = P'_{bc} + \partial^a \varphi_{abc}, \quad \partial_{[a} \varphi_{bcd]} = 0, \quad \partial^d \partial_d \varphi_{abc} = 0; \end{array} \right. \\ C_1^{\star 1} \left\{ \begin{array}{l} \partial^a h_{ab} = 0, \quad \partial_{[a} h_{bc]} = c_{[abc]}, \\ h_{ab} = \partial^c P_{abc}, \quad \partial_{[d} P_{abc]} = 0, \quad \partial^d \partial_d P_{abc} = c_{abc}, \\ P_{abc} = P'_{abc} + \partial_{[a} \varphi_{bc]}, \quad \partial^a \varphi_{ab} = 0, \quad \partial^d \partial_d \varphi_{ab} = 0; \end{array} \right. \\ C_0^1 \left\{ \begin{array}{l} \partial_{[a} b_{bcde]} - x b_{[abcde]} = c_{[abcde]}, \quad b_{[ijlk]} = b_{[abcde]}, \\ \partial^e b_{[abcde]} - x b_{[abcd]} = c_{[abcd]}, \quad c_{[ijlk]} = 0, \\ b_{[abcd]} = \partial^e P_{[abcde]} + x P_{[abcd]}, \\ b_{[abcde]} = \partial_{[a} P_{abcd]} + x P_{[abcde]}, \\ (\partial^f \partial_f - x^2) \left\{ \begin{array}{l} P_{abcd} = c_{abcd}, \\ P_{abcde} = c_{abcde}, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} P_{ijlk} = 0, \\ \partial^d P_{abcd} = 0, \end{array} \\ P_{abcd} = P'_{abcd} + \partial^e \varphi_{abcde} - x \varphi_{abcd}, \\ P_{abcde} = P'_{abcde} + \partial_{[e} \varphi_{abcd]} - x \varphi_{abcde}, \\ (\partial^f \partial_f - x^2) \left\{ \begin{array}{l} \varphi_{abcd} = 0, \\ \varphi_{abcde} = 0, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \partial^d \varphi_{abcd} = 0, \\ \varphi_{ijlk} = \varphi_{abcde}. \end{array} \end{array} \right. \end{array} \right\} \quad (23)$$

Les équations du corpuscule $C_0^{\star 1}$ conduisent à un système analogue. Nous voyons apparaître ici une complication provenant du fait que nous sommes obligés de nous servir à la fois des pseudopentavecteurs et des pseudoscalaires, mettant en jeu 6 composantes, mais qui se réduisent à 5, tantôt par suite de l'annulation de la cinquième composante du pentavecteur ($C_{ijlk} = 0$, $P_{ijlk} = 0$), tantôt par suite de l'égalité de celle-ci et de la grandeur pseudoscalaire ($b_{ijlk} = b_{abcde}$, $\varphi_{ijlk} = \varphi_{abcde}$). Cette complication se rattache au fait que la réduction de la représentation du corpuscule de spin 1 donne naissance à une représentation d'ordre 10 qui est celle du C_1^1, à une autre d'ordre 5, celle du C_0^1 et à une troisième d'ordre 1 (C_0^0).

Les groupes (a'), (b') et (c') s'écrivent, par contre,

plus simplement. Nous avons, en effet,

$$\left.\begin{array}{l}
C'^{1}_{1}\left\{\begin{array}{l}
\partial^a h_{ab} = c^{\star}_b, \qquad \partial_{[c} h_{ab]} = 0, \\
h_{ab} = \partial_a P_b - \partial_b P_a, \qquad \partial^a P_a = 0, \\
\partial^f \partial_f P_a = c^{\star}_a, \quad P_a = P'_a + \partial_a \varphi, \quad \partial^f \partial_f \varphi = 0;
\end{array}\right. \\
C'^{\star 1}_{1}\left\{\begin{array}{l}
\partial^a h^{\star}_{abc} = 0, \quad \partial_{[d} h_{abc]} = c_{abcd}, \quad h_{abc} = \partial^d P_{abcd}, \\
\partial_{[e} P_{abcd]} = 0, \qquad \partial^f \partial_f P_{abcd} = c_{abcd}, \\
P_{abcd} = P'_{abcd} + \partial^e \varphi_{abcde}, \qquad \partial^f \partial_f \varphi_{abcde} = 0;
\end{array}\right. \\
C'^{1}_{0}\left\{\begin{array}{l}
\partial^d b_{abcd} = c_{abc}, \qquad \partial_{[e} b_{abcd]} = 0, \\
b_{abcd} = \partial_{[d} P_{abc]}, \quad \partial^c P_{abc} = 0, \quad \partial^f \partial_f P_{abc} = c_{abc}, \\
P_{abc} = P'_{abc} + \partial_{[c} \varphi_{ab]}, \quad \partial^a \varphi_{ab} = 0, \quad \partial^f \partial_f \varphi_{ab} = 0;
\end{array}\right. \\
C^{\star\prime 1}_{0}\left\{\begin{array}{l}
\partial_a b_b - \partial_b b_a = c_{ab}, \qquad \partial^a b_a = 0, \\
b_a = \partial^b P_{ab}, \qquad \partial_{[c} P_{ab]} = 0, \qquad \partial^f \partial_f P_{ab} = c_{ab}, \\
P_{ab} = P'_{ab} + \partial^c \varphi_{abc}, \quad \partial_{[d} \varphi_{abc]} = 0, \quad \partial^f \partial_f \varphi_{abc} = 0.
\end{array}\right.
\end{array}\right\} \qquad (24)$$

7. Corpuscule de spin 1, soumis au champ extérieur. — Dans ce qui précède nous avons étudié les équations du corpuscule de spin 1 libre, mais le cas important à traiter est celui où il est soumis à l'action d'un champ extérieur si ce champ est de nature électromagnétique, l'usage veut qu'on le décrive à l'aide d'un potentiel-vecteur, ce qui est justifié par le caractère quadrivectoriel des sources (qui sont les densités de charge et de courant) de ce champ à l'échelle macroscopique. Et l'étude que nous venons de faire, montre clairement que les caractéristiques des champs potentiels sont les mêmes que celles des sources du champ envisagé. La transposition à l'échelle atomique de l'emploi du potentiel quadrivecteur pour la description du champ électromagnétique d'interaction entre les charges élémentaires, ne nous paraît pas être absolument légitime et rien n'est moins sûr que cette image naïve de l'électron, ne jouant que par sa charge et son mouvement dans l'espace pour créer le champ photonique microscopique. La source du champ photonique est la transition de l'électron entre deux états; à cette transition correspond dans la théorie de Dirac tout un complexe multitensoriel des champs ([5]), qui doit être traité comme source multitensorielle du champ photonique élémentaire. Nous étudierons ce problème plus à fond dans un travail ultérieur.

Nous allons étudier seulement le cas du corpuscule C'^{1}_{1}, en supposant qu'il se trouve plongé dans un champ électromagnétique extérieur $\mathcal{H}_{ab}$, dérivant d'un potentiel-vecteur $\mathcal{A}_a$, relatif au quadrivecteur « courant et charge » $\mathcal{J}_{ab}$ ($\mathcal{H}_{ab} = 0$, $\mathcal{A}_a = 0$, $\mathcal{J}_a = 0$ lorsqu'un des indices a ou b est égal à 5), nous avons donc

$$\mathcal{H}_{ab} = \partial_a \mathcal{A}_b - \partial_a \mathcal{A}_b, \qquad \partial^a \mathcal{H}_{ab} = \mathcal{J}_b.$$

Nous allons introduire l'opérateur D_a (D_j, D_5) tel que

$$D_j = \partial_j + \varepsilon \mathcal{A}_j, \qquad D_5 = \partial_5 = \varkappa.$$

Nous allons admettre que les équations de champ (du corpuscule C'^{1}_{1}) présentent une invariance par rapport à la transformation de jauge

$$P_a = P'_a + D_a \varphi,$$

P_a étant le potentiel du champ. On voit immédiatement que la relation $h_{ab} = D_a P_b - D_b P_a$ ne jouit pas de cette propriété ([5]) (elle conduirait d'ailleurs à un système incompatible d'équations), ce qui, compte tenu des propriétés des opérateurs D_a

$$D_a D_b - D_b D_a = \varepsilon \mathcal{H}_{ab},$$

nous conduit à poser

$$h_{ab} = D_a P_b - D_b P_a - \frac{\varepsilon}{\varkappa} \mathcal{H}_{ab} P_5, \qquad D^a P_a = 0,$$

Suivant alors que l'on pose

$$D^a D_a P_b - 2 \varepsilon \mathcal{H}^a{}_b P_a - \frac{\varepsilon}{\varkappa} \mathcal{J}_b P_5 - \varepsilon \mathcal{H}^{ab} D_b P_5 = 0 \qquad (a)$$

ou

$$D^a D_a P_b - 2 \varepsilon \mathcal{H}^a{}_b P_a - \frac{\varepsilon}{\varkappa} \mathcal{J}_b P_5 = 0. \qquad (b)$$

on obtient, soit les équations de Proca ([6])

$$D^a h_{ab} = \varepsilon \mathcal{H}^{ab} h_{ab}, \qquad D_{[c} h_{ab]} = - \frac{\varepsilon^2}{\varkappa} \mathcal{H}_{[ab} h_{c]5}, \qquad (a)$$

soit les équations modifiées par l'adjonction d'un moment magnétique supplémentaire ([7])

$$D^a h_{ab} = - \varepsilon \mathcal{H}_{ab} h^a{}_5, \qquad D_{[c} h_{ab]} = - \frac{\varepsilon^2}{\varkappa} \mathcal{H}_{[ab} h_{c]5}. \qquad (b)$$

Cas des corpuscules à spin supérieur à 1. — Les considérations précédentes se généralisent sans peine aux corpuscules à spin quelconque et l'on constate aisément que, dans le cas le plus général, les sources, les champs, les potentiels et les fonctions génératrices des transformations de jauge sont décrits par des ensembles homologues des grandeurs spinorielles. Traitons à titre d'exemple le cas du corpuscule C^2_2 dont la description demande l'emploi d'une onde à 35 composantes, qui se répartissent ([2]) en deux spineurs à 5 composantes $\xi_{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)+}$ et $\eta_{(\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4)+}$, en deux spineurs à 8 composantes

([4]) B. Kwal, *C. R. Acad. Sc.*, 1934, **199**, p. 23; *J. de Physique et Radium*, 1936, **7**, p. 223.

([5]) B. Kwal, *C. R. Acad. Sc.*, 1947, **225**, p. 922.

([6]) A. Proca, *J. de Physique*, 1936, **7**, p. 367.

([7]) H. C. Corben et J. Shwinger, *Phys. Rev.*, 1940, **58**, p. 953.

L'emploi d'un champ potentiel à cinq composantes dans la théorie du méson, mais dans un autre but qu'ici, semble avoir été envisagé pour la première fois par C. G. Stuckelberg, *Helv. Phys. Acta*, 1938, **11**, p. 225. *Cf.* aussi P. Caldirola, *Nuovo Cimento*, 1942, **19**, p. 25 et C. Salvetti, *Id.*, 1946, **4**, p. 257.

$\xi_{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)+}{}^{\beta_4}$ et $\eta_{\alpha_1}{}^{(\beta_2\beta_3\beta_4)}{}_{+}$ et un spineur à 9 composantes $\xi_{(\alpha_1\alpha_2)+}{}^{(\beta_3\beta_4)}{}_{+}$, satisfaisant aux équations d'onde avec sources

$$\partial^{\beta_4\alpha_4}\,\xi_{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)} - x\,\xi_{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)}{}^{\beta_4} = c_{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)}{}^{\beta_4},$$
$$\partial^{\beta_3\alpha_3}\,\xi_{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)}{}^{\beta_4} - x\,\xi_{(\alpha_1\alpha_2)}{}^{(\beta_3\beta_4)} = c_{(\alpha_1\alpha_2)}{}^{(\beta_3\beta_4)},$$
$$\partial_{\alpha_2\beta_2}\,\eta_{\alpha_1}{}^{(\beta_2\beta_3\beta_4)} \mp x\,\xi_{(\alpha_1\alpha_2)}{}^{(\beta_3\beta_4)} = c_{(\alpha_1\alpha_2)}{}^{\beta_3\beta_4},$$
$$\partial_{\alpha_1\beta_1}\,\eta^{(\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4)} \mp x\,\eta_{\alpha_1}{}^{(\beta_2\beta_3\beta_4)} = c_{\alpha_1}{}^{(\beta_2\beta_3\beta_4)},$$
$$\partial^{\beta_1\alpha_1}\,\eta_{\alpha_1}{}^{(\beta_2\beta_3\beta_4)} - x\,\eta^{(\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4)} = c^{\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4},$$
$$\partial^{\beta_2\alpha_2}\,\xi_{(\alpha_1\alpha_2)}{}^{(\beta_3\beta_4)} - x\,\eta_{\alpha_1}{}^{(\beta_2\beta_3\beta_4)} = c_{\alpha_1}{}^{\beta_2\beta_3\beta_4},$$
$$\partial_{\alpha_3\beta_3}\,\xi_{(\alpha_1\alpha_2)}{}^{(\beta_3\beta_4)} \mp x\,\xi_{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)}{}^{\beta_4} = c_{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)}{}^{\beta_4},$$
$$\partial_{\alpha_4\beta_4}\,\xi_{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)}{}^{\beta_4} \mp x\,\xi_{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)} = c_{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)}.$$

L'introduction des champs potentiels se fera alors grâce aux formules

$$\xi_{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)} = \pm\,\partial_{\alpha_4\beta_4}\Pi_{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)}{}^{\beta_4} + x\,\Pi_{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)},$$
$$\xi_{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)}{}^{\beta_4} = \pm\,\partial_{\alpha_3\beta_3}\Pi_{(\alpha_1\alpha_2)}{}^{\beta_3\beta_4} + x\,\Pi_{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)}{}^{\beta_4}$$
$$= \partial^{\beta_4\alpha_4}\Pi_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4} + x\,\Pi_{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)}{}^{\beta_4},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

avec

$$\partial_{\alpha_5\beta_5}\,\partial^{\beta_5\alpha_4}\,\Pi_{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)} - x^2\,\Pi_{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_5)} = c_{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_5)}; \quad \ldots$$

En conclusion, il nous semble que les théories du photon et du méson doivent être basées sur l'étude générale des sources et des champs potentiels qui leur correspondent. Mais cette étude exige la connaissance du champ de sources auquel conduit un électron ou un nucléon. Les théories de l'électron et du photon doivent d'ailleurs se développer ensemble, un électron isolé ou un photon isolé étant, en fin de compte, des abstractions qui n'ont aucune réalité physique profonde.

Manuscrit reçu le 11 février 1949.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE ET LE RADIUM. SÉRIE VIII, TOME X, JUIN 1949.

POURQUOI DEUX VIOLONS FONT-ILS TOUJOURS PLUS DE BRUIT QU'UN SEUL ? (1)

Par A. MOLES.

Chargé de Recherches, Laboratoire d'Acoustique du C. N. R. S. à Marseille.

Sommaire. — La théorie des interférences permet de penser que quand deux violons jouent à l'unisson il y a une probabilité de 1/2 que le son résultant soit moins intense que celui de chacun des composants. L'expérience montre qu'il n'en est rien et diverses explications ont été avancées pour rendre compte de ce fait, en particulier l'hypothèse de variations brusques erratiques de la phase relative des instruments. Procédant par enregistrement, on a constaté que c'était à de nombreuses fluctuations erratiques de la fréquence autour de sa valeur nominale correspondant à l'unisson qu'il fallait attribuer ce résultat. On a précisé numériquement l'ordre de grandeur et les causes de ces fluctuations, ce qui a conduit à diverses remarques sur le jeu de deux violons.

1. Introduction : Interférences entre deux sources sonores. — On enseigne dans les cours de Physique élémentaire le phénomène d'interférences entre deux sources lumineuses ou sonores synchrones, phénomène que l'on illustre par des analogies à l'aide de la cuve à rides où l'on montre à la surface du mercure les réseaux hyperboliques d'interférences entre deux sources synchrones constituées par deux pointes reliées à une branche de diapason.

On passe ensuite à l'expérience directe et faisant écouter aux étudiants le son pur issu de deux haut-parleurs alimentés par un même oscillateur on leur fait remarquer les variations locales d'intensité qui se produisent quand on déplace l'un des haut-parleurs par rapport à l'autre, modifiant ainsi les trajets des ondes sonores issues de chacune des sources. Ces variations sont très irrégulières dans une salle ordinaire dans laquelle la réflexion sur les parois joue un rôle très important. Pour obtenir le réseau hyperbolique prévu par la théorie, il faut que le son direct venant de la source ait une intensité nettement supérieure au son réfléchi sur les parois, c'est-à-dire que l'on opère dans une salle assez absorbante, ou mieux en salle sourde.

2. Cas de deux violons. — Le phénomène est général : c'est une conséquence même de la nature ondulatoire du son et du phénomène de propa-

(1) Communication à la séance du 6 novembre 1948 de la Section de Marseille de la Société française de Physique.

gation. On devrait donc s'attendre à l'observer avec toutes les sources sonores synchrones; ainsi quand deux violons d'un quatuor jouent simultanément la même note et pour peu que la longueur d'onde de celle-ci soit assez grande devant les dimensions des instruments, on devrait constater des interférences entre les deux violons au moins quand les demi-longueurs d'ondes émises sont nettement supérieures à 25 ou 30 cm représentant les dimensions maxima d'une table vibrante, puisqu'on obtient le même phénomène avec des haut-parleurs.

L'expérience la plus courante montre qu'il n'en est rien et que deux violons font toujours plus de bruit qu'un seul. D'où vient ce flagrant désaccord entre la théorie et l'expérience ?

La première idée qui vient à l'esprit c'est que l'accord entre les violons n'est pas parfait, ce qui est vraisemblable, mais en ce cas on devrait percevoir des battements dans le temps entre les deux instruments et l'on ne perçoit rien de tel.

La plupart des auteurs donnent des explications assez sommaires du fait et admettent qu'il se produit au cours du jeu de l'archet des variations brusques de la phase au bout d'un très petit nombre de périodes et que le déphasage des fondamentaux change très souvent par seconde sans loi aucune.

3. **Critique des explications classiques.** — Aucune expérience n'a été faite à notre connaissance pour justifier ces vues et mettre en évidence ces variations brusques de phase et l'on se base simplement sur l'idée que l'entretien d'un archet colophané est réalisé par une suite de glissements et d'entraînements de la corde sous l'archet, la corde utilisant l'énergie fournie par l'archet à vibrer à sa fréquence propre. On peut dont penser que l'archet « rattrape » la corde en un instant quelconque de sa vibration et l'entraîne en fixant brusquement la phase de la vibration suivante, etc. Cependant une étude plus approfondie du système considéré comme un oscillateur à relaxation fait prévoir que l'archet adhérera à la corde aux instants où leur vitesse relative est nulle (propriétés des cordes colophanées), c'est-à-dire des instants parfaitement définis de la période, donc que finalement les instants de frottement et d'abandon de la corde par l'archet se synchroniseront sur la période propre de la corde dont le coefficient de surtension $\frac{M\omega}{r}$ (M masse linéique de la corde, r somme des coefficients de dissipation d'énergie dans la corde et par rayonnement) est grand, selon le mécanisme classique de la synchronisation, l'archet fournissant pendant le court intervalle de son adhérence à la corde de l'énergie synchronisante compensant l'amortissement. Dans ces conditions les variations erratiques de phase deviennent illusoires.

Par ailleurs de nombreuses expériences oscillographiques ne nous avaient jamais montré de variations erratiques de la phase des oscillations qui se succédaient sur l'oscillographe et sur les enregistrements sans variations ni discontinuités d'aucune sorte. On a donc été amené à étudier le phénomène de vibrations de deux violons jouant en accord.

4. **Dispositif expérimental.** — Le problème concerne plus particulièrement deux violons : lord Rayleigh a montré en effet que pour un grand nombre de sources synchrones dont les phases sont réparties au hasard, l'intensité résultante tend à croître comme la racine carrée du nombre des sources composantes : il est donc à prévoir que ce n'est que dans le cas d'un très faible nombre d'instruments que l'on peut s'attendre à rencontrer des variations notables de l'intensité résultante.

On a alors utilisé le dispositif expérimental (*fig.* 1),

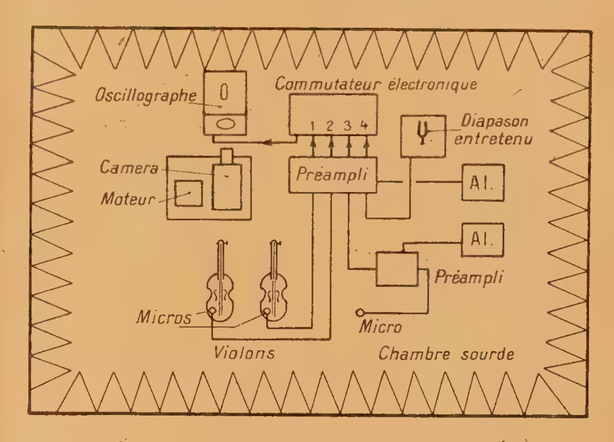


Fig. 1. — Schéma de principe du dispositif.

deux violons étaient munis chacun d'un microphone électromagnétique (écouteur) fixé en des points correspondants de la table. Ces deux microphones débitaient sur des préamplificateurs et sur deux canaux d'un commutateur électronique à quatre directions. Un troisième microphone, électrodynamique, était placé à 1,5 m environ des deux exécutants : relié à un préamplificateur il recueillait le son résultant qui était appliqué à la troisième voie du commutateur électronique. Enfin sur la quatrième voie de celui-ci on appliquait un signal de temps provenant d'un diapason entretenu.

L'ensemble de l'appareillage était placé dans une chambre sourde et l'on effectuait les enregistrements en cinématographiant l'ecran de l'oscillographe, balayage supprimé, avec une camera à déroulement continu.

On a d'abord vérifié que les deux microphones captant le son de chaque violon étaient linéaires en amplitudes et que l'ensemble de la première et de la deuxième voie introduisait des déphasages identiques entre eux et voisins de celui introduit par la

troisième voie représentant le son résultant. On a vérifié que les résultats étaient identiques en permutant les microphones 1 et 2.

On a ensuite accordé très soigneusement les violons sur la corde sol qui a été principalement utilisée pour ces expériences : l'accord réalisé était très supérieur à celui qui est obtenu dans n'importe quel orchestre.

5. **Interprétation des enregistrements.** — Les enregistrements dont certains sont reproduits ci-joint permettent d'établir les points suivants :

A. Il ne se produit aucune variation brusque discontinue de la phase des vibrations durant la course de l'archet (0,5 à 5 s) : chacun des enregistrements est une courbe parfaitement continue et sans incidents.

B. Il y a une très grande différence entre la forme des vibrations d'un même point de la table (près de la mentonnière) pour deux violons de qualités voisines (*fig.* 2).

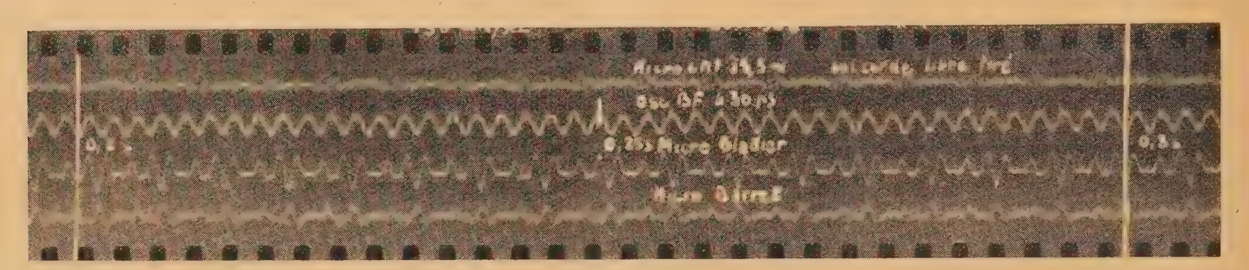


Fig. 2. — Différence entre deux violons de qualité voisine, vibration au même endroit de la table.



Fig. 3. — Différences entre les états vibratoires en haut et en bas de la table du violon.

C. Il y a une très grande différence entre les états vibratoires instantanés du haut et du bas de la table d'un violon; c'est là une chose bien connue et facile à prévoir d'après la complexité des courbes de Chladni relatives aux vibrations des plaques. Ainsi pour la note sol_2 le haut de la table vibre de façon beaucoup plus complexe que le bas près de la mentonnière (*fig.* 3).

D. Sur les notes graves ou cordes libres et sur les premières positions, le son produit est toujours très complexe : l'amplitude des harmoniques est nettement supérieure à celle du fondamental et l'on a affaire à des groupes d'harmoniques dont les différences donnent la sensation de hauteur (*cf.* Stevens et Davis, Hearing, p. 70). On conçoit qu'une faible variation de la fréquence du fondamental puisse, sans modifier notablement la sensation de hauteur, entraîner une variation appréciable de la phase des harmoniques élevés par rapport soit à un repère fixe, soit à un autre violon, amenant en quelques périodes des différences notables dans la forme et l'amplitude du son perçu à une certaine distance.

E. Sur une note pure soutenue après accord aussi parfait que possible des deux violons, on remarque en examinant les oscillogrammes :

1° Un léger écart de fréquence initial dû à l'impossibilité de parvenir à un accord parfait et atteignant environ 1 pour 100 sur le sol_2, ce qui correspond bien aux résultats de Burck, Kotovski et Lichte.

2° Une fluctuation périodique de la fréquence au rythme des coups d'archet : celle-ci varie autour de sa valeur initiale obtenue à peu près au milieu de la course de l'archet (*fig.* 4). Ces fluctuations, différentes pour chaque violon, atteignent au maximum 0,5 pour 100. Elles sont difficiles à mettre en évidence sur des enregistrements en raison de leur faible valeur, mais une méthode très sensible permettant de les déceler et de les chiffrer consiste à synchroniser le balayage de l'oscillographe sur le son émis par l'un des violons, ce qui « verrouille » la trace de celui-ci sur l'écran fluorescent. Dans ces conditions on voit la trace correspondant à l'autre violon se déplacer, soit dans un sens, soit dans l'autre au rythme des coups d'archet et il suffit de compter le nombre de périodes défilant par seconde en un

point de référence pris sur la trace fixe pour avoir une estimation de la grandeur des fluctuations de fréquence.

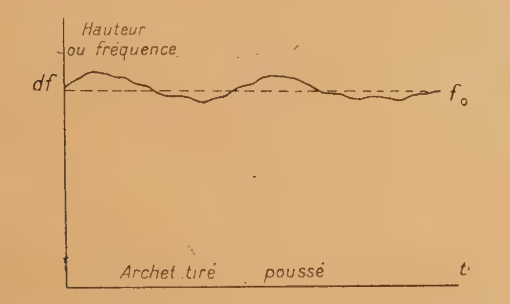


Fig. 4. — Variation de la hauteur pendant la course de l'archet.

3° Enfin, au bout de quelques minutes de fonctionnement, il se produit un écart systématique des fréquences des deux violons : ceux-ci se désaccordent du simple fait des vibrations des cordes qui se relachent de manières différentes sur chaque instrument. Ces différences peuvent atteindre facilement 1 pour 100 (2 p : s sur le sol_2) et deviennent perceptibles à une oreille exercée au bout de 3 à 4 mn. Elles sont plus prononcées après les staccati et les pizzicati, ce qui montre bien l'influence du travail de la corde.

L'ensemble de ces causes conduit en résumé à une variation erratique de la hauteur d'amplitude de l'ordre de 1 pour 100 su les notes graves. Ces variations sont manifestes sur les enregistrements (*fig.* 5) par comparaison avec l'état initial de l'état vibratoire obtenu au bout de délais de l'ordre de la demi-seconde, comparaison réalisée en superposant diverses parties de l'enregistrement.

F. Corrélativement à ces modifications de fréquence on note effectivement des variations d'amplitude atteignant 20 pour 100 (*fig.* 6) dues aux irrégularités de la pression de l'archet qui s'annule à chaque fin de course et subit des variations quasi périodiques au cours de son trajet.

Ces variations restent très irrégulières et quelquefois disparaissent pour un jeu très continu.

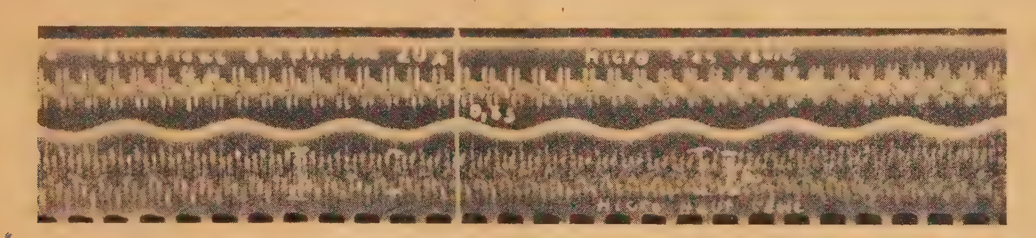


Fig. 5. — Variations d'amplitude et de fréquence dans un enregistrement (superposition de deux parties séparées de 0,5 s).

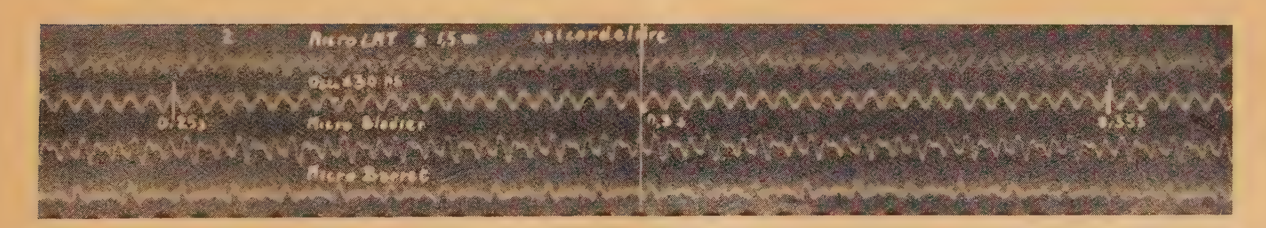


Fig. 6. — Variations d'amplitude du son résultant (trace supérieure) dues à des battements irréguliers.

G. Dans ces conditions le son résultant de deux violons jouant « en accord » est un phénomène très complexe (*fig.* 3) dépendant de la position de l'auditeur au premier chef, n'ayant plus qu'une périodicité approximative et qu'on définira par son amplitude moyenne ou mieux par son spectre moyen.

H. Dans les courts intervalles de temps où chacun des deux violons jouant une note pure soutenue sur le même tiré de l'archet, passe au voisinage de l'accord parfait, le son résultant à une certaine distance (3° microphone) présente effectivement un maximum comme le veut la théorie ; au bout de quelques 1/10e de seconde, un désaccord relatif apparaît et l'amplitude du son résultant décroît jusqu'à se renforcer de nouveau quand l'écart est suffisant, etc., selon le même mécanisme que les battements.

On sait que pour avoir une sensation de battements définie, il faut percevoir une suite régulière d'un certain nombre de ceux-ci, nombre qui dépend de leur période et qui atteint 4 ou 5 au moins pour le battement ayant une durée de l'ordre de grandeur ci-dessus. Riesz et d'autres auteurs ont montré que, aux fréquences 100-200 p : s, l'oreille ne percevait pas les variations d'amplitude dont l'ampleur

est inférieure à 30 et 40 pour 100 (3 db) au rythme de 4 ou 5 p : s; or les variations d'amplitude ici constatées sont généralement très inférieures à cette valeur et elles passeront inaperçues. Il paraît d'ailleurs impropre de parler ici de « battements » phénomène acoustique défini, quand on a affaire à deux ou trois variations successives d'amplitude sans période caractérisée comme c'est le cas ici.

I. Dans le jeu normal du violoniste, ces causes de variations de fréquence ou d'amplitude se trouvent encore compliquées par la pratique systématique du vibrato, utilisé pour donner plus de vigueur aux notes. Celui-ci consiste en une modulation assez irrégulière au rythme de 8 p : s environ :

1° De la fréquence dont l'excursion atteint 1/4 de ton, soit à peu près 1 à 2 pour 100;

2° De l'amplitude dont les variations atteignent 20 pour 100.

Les enregistrements (*fig.* 7, n° 1) montrent les fluctuations très notables de la fréquence et de l'amplitude qui sont produites par le vibrato.

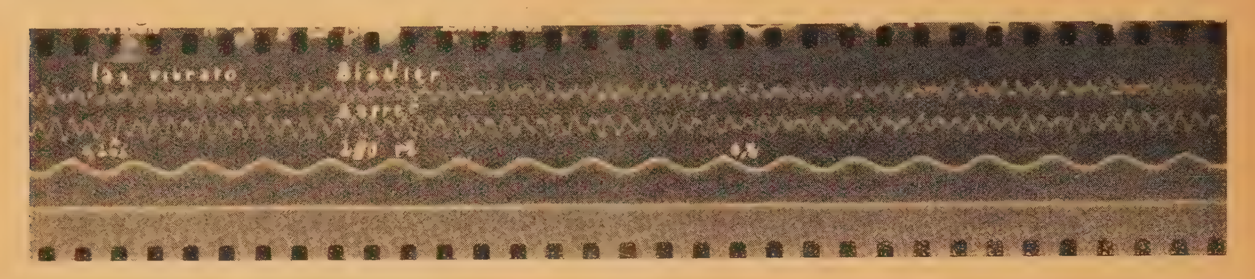


Fig. 7. — Variations d'amplitude dues au vibrato.

J. Les seules variations notables de phase que l'on constate dans le jeu d'un violon sont dues au renversement du mouvement de l'archet qui, passant du mouvement tiré au mouvement poussé, amène un changement brusque du signe de l'oscillogramme dont les figures 8, n°s 1 et 2 donnent des exemples particulièrement frappants. On peut expliquer ce phénomène par l'inversion de l'effort de traction de l'archet colophané. Il correspond sur un développement en série de Fourier à termes impairs

$$F(t) = \sum_{1}^{\infty} A_n \, e^{in2\pi ft} \qquad (n = 2p + 1)$$

Fig. 8. — Changement de sens de la vibration quand l'archet change de sens de mouvement.

à un changement de phase de l'argument de 180°

$$F(t) = \sum_{1} A_n \, e^{in(2\pi ft + \pi)}$$

et ce phénomène ne se produira que quand le développement ne contient que des harmoniques impairs ou que ceux-ci sont nettement prépondérants.

Ce renversement de l'oscillogramme se produisant au moment où l'archet change de sens s'accompagne d'une annulation de l'amplitude du son due au relèvement de l'archet. Cette variation d'amplitude qui est progressive et suit à peu près la courbe de Van der Pol relative à l'amorçage des oscillations de relaxation, masque complètement à l'oreille l'importance de cette discontinuité systématique dans la phase du phénomène (*fig.* 9).

Une telle variation de phase serait cependant remarquable si deux violons jouaient à l'unisson, l'un poussant son archet, l'autre le tirant; on sait par exemple que quand plusieurs haut-parleurs sont montés en parallèle sur un baffle et que les connexions de l'un d'entre eux se trouvent permutées par erreur, le champ sonore produit à quelque distance accuse de fortes distorsions et la puissance moyenne émise s'en trouve diminuée.

Cette variation se trouve généralement dissimulée dans les grands orchestres symphoniques par la discipline imposée par le chef d'orchestre qui exige que les divers violons d'un même groupe poussent et tirent l'archet en même temps, assurant ainsi dans le groupement des premiers et seconds violons des mouvements rigoureusement synchrones.

Dans ces conditions il n'y a pas de déphasage

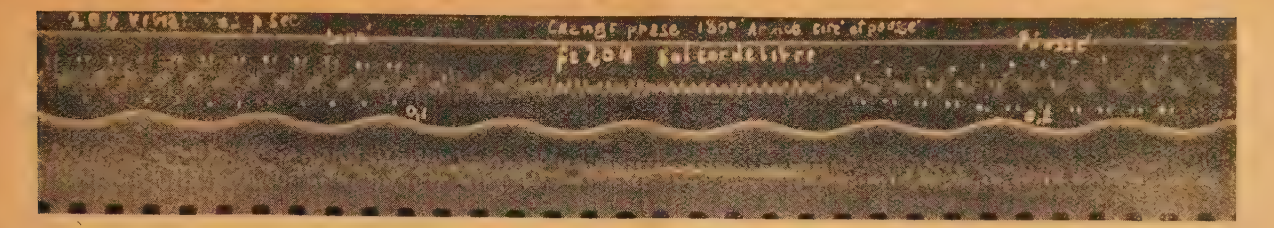


Fig. 9. — Inversion du signe de la vibration au cours du changement de sens de l'archet. La forme de la vibration est repérée par trois points.

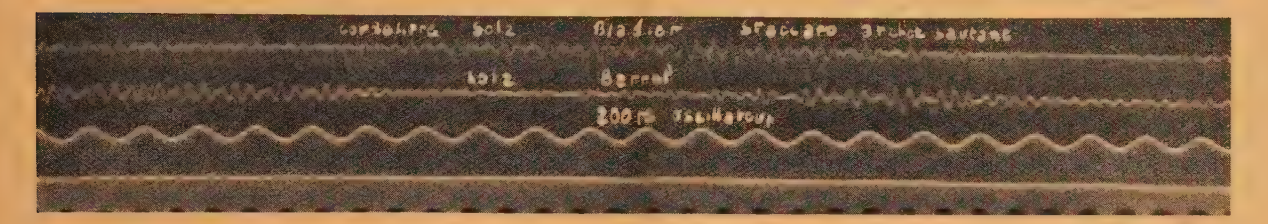


Fig. 10. — Enregistrement de staccato : On note les variations considérables d'amplitude, non simultanées chez les deux exécutants.

systématique de 180° correspondant à une opposition entre les divers artistes. Il est possible que ce soit pour éviter — plus ou moins consciemment — cet effet perturbateur qu'apporteraient des violons jouant en opposition avec l'ensemble de leurs collègues que les chefs d'orchestre exigent ce synchronisme dans les mouvements qui caractérise les grands orchestres. Il est d'ailleurs évident que si l'influence de quelques violons jouant en opposition dans un orchestre comprenant 20 ou 30 violons peut être difficile à percevoir pour d'autres que des oreilles très exercées, elle sera beaucoup plus sensible sur un groupe de quelques exécutants.

K. Enfin le staccato est encore une cause supplémentaire de variation de la phase relative des violons les uns par rapport aux autres. Dans les orchestres, il est rarement pratiqué sous la forme de staccato « volant » dans lequel l'archet glisse en rebondissant sur la corde en raison des difficultés d'assurer un parfait synchronisme entre les mouvements des musiciens. Les fluctuations accidentelles de fréquence sont alors considérables en raison de l'effort auquel la corde est soumise ; les pressions instantanées de l'archet sur la corde passent facilement des 30 à 40 g normaux à 100 g et plus. Ici encore ces fluctuations de la fréquence sont couvertes par des fluctuations d'amplitude au même rythme (4 à 5 p : s) atteignant 40 db, donc très supérieures aux phénomènes de superposition entre instruments voisins qui pourraient résulter des désaccords (*fig.* 10). Les violons d'orchestre pratiquent généralement un staccato constitué de petits coups d'archet rapides qui doivent être dans un bon orchestre en parfait synchronisme.

Conclusion. — On peut conclure des remarques précédentes :

1° Il n'y a pas dans le jeu normal du violon de discontinuités erratiques dans la phase des oscillations.

2° Les seules discontinuités définies et systématiques sont un changement de signe correspondant à un changement de phase harmonique de 180° entre les vibrations d'une corde archet tiré et archet poussé. Celles-ci se trouvent dissimulées à l'oreille par les annulations de l'amplitude sonore à chaque extrémité de la course de l'archet.

3° Pour obtenir effectivement avec deux violons des variations d'amplitude, fort irrégulières, et qu'on ne peut qualifier de battements — phénomène acoustique bien défini à caractère périodique — il faut réunir un ensemble de circonstances trop complexe pour être rencontré dans la pratique musicale. Les variations accidentelles d'amplitude qui se produisent sont noyées complètement dans l'ambiance sonore et disparaissent dans une salle un tant soit peu réfléchissante.

4° En effet la fréquence d'une corde de violon est sujette à de très nombreuses causes de variations et l'on peut dire que pratiquement celle-ci varie parfaitement au hasard d'environ 1 pour 100 autour de sa valeur nominale.

Manuscrit reçu le 15 février 1949.

REMARQUE SUR LA STABILITÉ

Par M. M. PARODI,
Institut Henri Poincaré.

Sommaire. — L'auteur donne des conditions suffisantes pour qu'une équation se présentant sous la forme d'un déterminant séculaire ait toutes ses racines à partie réelle négative et étudie la distribution de ces racines au voisinage de l'origine.

On sait que le problème de la stabilité d'un système se ramène à définir les conditions que doivent satisfaire les coefficients, réels, d'une équation algébrique de degré n pour que cette dernière ne possède pas de racines à partie réelle positive; de telles conditions ont été énoncées par Routh et par Hurwitz. Dans certaines études, le premier membre peut se présenter sous la forme d'un déterminant et l'équation s'écrire

$$F(z) = \begin{vmatrix} a_1^1 + z & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 + z & \dots & a_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^n + z \end{vmatrix} = 0 \qquad (1)$$

les éléments a_i^j étant réels et le déterminant d'ordre n.

Nous nous proposons de donner des conditions suffisantes pour que l'équation (1) n'ait pas de racines à partie réelle positive, sans qu'il soit nécessaire de développer le déterminant dans le but d'utiliser les relations de Routh ou d'Hurwitz.

Considérons le déterminant d'ordre n, à éléments réels ou complexes,

$$\| \alpha_i^j \|. \qquad (2)$$

M. J. Hadamard a montré (¹) que si ses éléments diagonaux sont tels que soient satisfaites les inégalités

$$|\alpha_i^i| - \sum_{k \neq i} |\alpha_i^k| > 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, n) \qquad (3)$$

le déterminant (2) ne peut être nul.

Supposons alors que les éléments du déterminant qui figure dans (1), quand on y fait $z = 0$, satisfassent aux inégalités (3) et que de plus les éléments diagonaux soient tous *positifs*, ce qui implique que la valeur de ce déterminant soit toujours positive (²); nous allons montrer que dans ces conditions l'équation (1) ne peut avoir de racines à partie réelle positive.

Soit en effet $z = x + iy$ une telle racine (x, y réels, $x > 0$) on aurait

$$\begin{vmatrix} a_1^1 + x + iy & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^n + x + iy \end{vmatrix} = 0; \qquad (4)$$

Or le module des termes diagonaux s'écrit

$$\sqrt{(a_i^i + x)^2 + y^2} \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

et, avec nos hypothèses, il est supérieur à celui de a_i^i; les conditions de M. Hadamard se trouvent encore vérifiées et la relation (4) est impossible.

Ainsi des conditions suffisantes pour que l'équation (4) ne puisse avoir des racines à partie réelle positive sont

$$a_i^i > 0, \qquad a_i^i > \sum_{k \neq i} |a_i^k| \qquad (i = 1, 2, \dots, n). \qquad (5)$$

On sait d'autre part que dans les problèmes de stabilité il est non seulement utile de connaître des critères qui assurent à la partie réelle des racines une valeur négative, mais aussi, cela étant, de préciser la distribution de ces racines au voisinage de l'axe imaginaire du plan des z, problème que l'on étudie habituellement en ayant recours au critérium de Nyquist.

Nous allons voir que le raisonnement qui nous a conduit aux relations suffisantes (5) permet d'aborder cette question.

Soit $z = x + iy$ un point du plan complexe de la variable z, le déterminant F (z), dont les éléments sont supposés satisfaire aux conditions (5), ne peut être nul si l'une des inégalités

$$(a_i^i + x) + iy - \sum_{k \neq i} |a_i^k| > 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

est satisfaite, ce qui peut s'écrire

$$(a_i^i + x)^2 + y^2 - \left[\sum_{k \neq i} |a_i^k| \right]^2 > 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, n). \qquad (6)$$

Le premier membre de cette inégalité égalé à

(¹) Leçons sur la propagation des ondes, Hermann, Paris, 1903, p. 13-14.

(²) *Voir*, par exemple, M. PARODI, Introduction à l'étude des réseaux électriques. *S. E. D. E. S.*, Paris, 1948, p. 7-8.

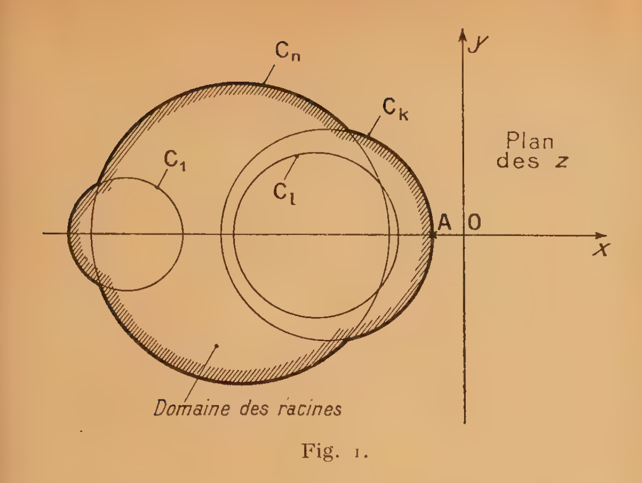


Fig. 1.

zéro représente un cercle C_i de centre $(-a_i^i, 0)$, de rayon $\rho_i = \sum_{k \neq i} |a_i^k|$ et à l'intérieur duquel peuvent se trouver des racines de l'équation (1). Le domaine du plan de la variable z où se trouvent les racines de cette équation est donc constitué par l'ensemble des surfaces des cercles de la famille C_i.

En traçant ces cercles, on obtiendra une figure analogue à celle que nous schématisons ci-contre (*fig.* 1) et l'on saura déterminer une limite inférieure OA du module de ses racines.

Si l'on désire la modifier, le graphique susvisé précisant le cercle, ici C_k, auquel appartient le point A, on pourra le faire à volonté en jouant sur les éléments de la $k^{\text{ième}}$ ligne du déterminant (1).

Nous avons donc là un moyen simple de parvenir à une stabilité aussi satisfaisante que l'on souhaite.

Manuscrit reçu le 26 janvier 1949.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE ET LE RADIUM. SÉRIE VIII, TOME X, JUIN 1949.

MISE EN ÉVIDENCE DE L'INFLUENCE DU DEGRÉ DE L'IONISATION DE L'ATOME SUR LA PÉRIODE DU NUCLIDE ^{7}Be

Par R. BOUCHEZ,
P. DAUDEL, R. DAUDEL et R. MUXART.
Laboratoire Curie, Institut du Radium.

A. ROGOZINSKI.
Laboratoire de Physique cosmique, Observatoire de Meudon.

Sommaire. — On a mis en évidence une différence de période de 1 pour 100 environ entre deux sources radioactives de ^{7}Be : l'une à l'état métal-élément, l'autre à l'état de combinaison chimique (fluorure). L'étude expérimentale a été réalisée à l'aide d'un montage différentiel sensible, constitué par deux chambres d'ionisation identiques et une lampe électromètre fonctionnant en grille isolée. Le résultat s'accorde assez bien avec les estimations théoriques; mais une théorie exacte du phénomène se heurte à des difficultés considérables.

1. **Introduction.** — A la suite des articles de E. Segré [1] et R. Daudel [2] signalant la possibilité d'une variation de la période du nuclide ^{7}Be sous l'influence d'une ionisation de l'atome, nous avons entrepris une série d'expériences pour étudier ce phénomène.

Une première étude a été effectuée à l'aide d'un ensemble de compteurs montés en parallèle permettant des comptages élevés sans perte : nous avons indiqué dans un article précédent [3] les renseignements obtenus; ces premiers résultats expérimentaux donnaient une nette indication en faveur de la variation de la période du ^{7}Be sans toutefois permettre de conclure d'une manière certaine à l'existence du phénomène.

Il nous a semblé utile de reprendre cette étude en utilisant, d'une part, un dispositif expérimental plus sensible susceptible de mesurer de très petites différences d'activité entre des sources intenses, d'autre part, en réalisant de telles sources suffisamment différenciées du point de vue chimique.

Cette double amélioration nous a permis d'observer une variation de la période du nuclide ^{7}Be entre l'état métallique et l'état fluorure.

2. **Indications théoriques.** — Le but des

présentes expériences est la comparaison de la période du bérylium métallique et de celle du fluorure de berylium. Il est difficile théoriquement d'évaluer la différence entre ces deux périodes.

Pour donner un ordre de grandeur de cette différence comparons d'abord la période d'un atome neutre de bérylium et de celle d'un ion Be^{++} [3].

On sait que la probabilité par unité de temps p_K de la capture d'un électron K est proportionnelle à $(\varepsilon_0 + \varepsilon_K)^2 \mid \psi_K \mid^2$.

ε_0 étant la différence d'énergie entre le noyau initial et le noyau final;

ε_K étant l'énergie de l'électron K, $\mid \psi_K \mid^2$ la densité de l'électron K *dans le domaine nucléaire.*

De même la probabilité de capture p_{L_1} d'un électron L_I est proportionnelle à $(\varepsilon_0 + \varepsilon_{L_1})^2 \mid \psi_{L_1} \mid^2$.

La probabilité de capture pour l'atome neutre s'écrit donc

$$p = p_K + p_{L_1}$$

et pour l'ion Be^{++},

$$p' = p_K.$$

Si l'on admet que la probabilité p_K n'est pas modifiée par le départ des électrons L; on est donc conduit pour la variation relative de période à la valeur

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{p_{L_1}}{p_K} = \left(\frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_{L_1}}{\varepsilon_0 + \varepsilon_K}\right)^2 \left|\frac{\psi_{L_1}}{\psi_K}\right|^2 \simeq \left|\frac{\psi_{L_1}}{\psi_K}\right|^2.$$

On peut en première approximation attribuer aux fonctions d'onde ψ des valeurs hydrogénoïdes solutions d'une équation de Schrödinger.

On obtient alors

$$\frac{\Delta T}{T} \simeq \frac{1}{8}\left(\frac{Z_{L_1}}{Z_K}\right)^3.$$

On introduit alors l'effet d'écran selon la méthode de Slater [4], ce qui donne

$$Z_{L_1} = Z - 2{,}05,$$
$$Z_K = Z - 0{,}3,$$

d'où

$$\frac{\Delta T}{T} \simeq 2 \text{ pour } 100.$$

En fait, les fonctions d'onde ne sont pas hydrogénoïdes, et le départ des électrons L provoque une augmentation de la probabilité p_K. Quand on tient compte de ces deux effets selon la méthode de Hartree on s'aperçoit que $\frac{\Delta T}{T}$ s'élève à environ 3 pour 100 (1) (le premier effet étant prépondérant).

Pour passer de l'étude de ce cas schématique (comparaison de la période d'un atome neutre et de celle d'un atome doublement ionisé) au cas concret qui nous préoccupe, nous devons faire les deux remarques suivantes :

a. Dans le métal, Pauling [5] estime que les électrons L possèdent un caractère s de 50 pour 100 et un caractère p de 50 pour 100. Comme la probabilité de capture des électrons p est négligeable, on voit que le terme p_{L_1} se trouve ici divisé par deux;

b. Dans le fluorure, le bérylium n'est que partiellement ionisé [6] (environ 87 pour 100).

Dans ces conditions, la variation relative de période peut être évaluée à

$$\frac{\Delta T}{T} = 0{,}03 \times 0{,}87 \times 0{,}5 \simeq 1{,}3 \text{ pour } 100.$$

Cette dernière estimation reste encore très grossière car nous avons négligé la possibilité pour le noyau de bérylium d'absorber les électrons de l'oxygène.

Des calculs plus précis sont en cours, mais il faut tout de suite signaler que ces calculs n'entraîneront pas la certitude étant donnée la nature des approximations qu'on est obligé de faire.

En résumé, il est difficile d'évaluer par la théorie la densité des électrons au voisinage d'un noyau; seules des expériences comme celles-ci pourront permettre cette évaluation.

3. **Préparation des sources.** — Le bérylium radioactif est obtenu à partir d'une cible de Li irradiée par des deutons de 6,7 MeV au cyclotron du Collège de France (temps d'irradiation $\simeq$ 100 h; quantité d'électricité $\simeq 1600\,\mu$A.h).

Le bérylium est donc dilué dans une grande masse de lithium, et doit être amené partie à l'état métallique, partie à l'état de fluorure.

La cible de lithium irradiée (de l'ordre de 5 g) découpée en fragments est jetée peu à peu dans 500 à 600 cm³ d'eau contenue dans un bécher de 4 l.

On amène à pH = 1 en ajoutant de l'acide sulfurique. L'entraîneur destiné à floculer le bérylium radioactif est constitué par 90 mg de sulfate de bérylium.

Après cette addition on ramène le pH en zone basique (environ 8) en traitant par de l'ammoniaque. La glucine apparaît; on la flocule par chauffage et on la filtre selon le procédé Sue.

La glucine obtenue, une fois séchée, est transformée en chlorure de bérylium; cette opération se fait en deux étapes :

a. On chauffe d'abord vers 800° la glucine avec du charbon de sucre dans une atmosphère d'anhydride carbonique.

Le mélange (12 mg de glucine pour 30 mg de charbon) très intime et légèrement humecté d'eau, est porté par une nacelle de quartz contenue dans un tube de porcelaine traversé par un courant de CO_2.

(1) P. Benoist, *C. R.*, 1949, **228**, p. 309.

b. Après 30 mn de chauffe la nacelle de quartz est introduite dans un tube de quartz à 900° parcouru par un courant très sec de chlore [9].

Le chlorure de béryllium sublime sur les parois du tube de quartz. Recueilli, il est introduit par parties égales dans deux nacelles d'alumine fondue. On recouvre le chlorure d'un excès de sodium purifié par distillation sous vide.

Les nacelles sont ensuite chauffées modérément dans un tube de verre pyrex parcouru par un courant d'hydrogène.

On obtient ainsi deux nacelles identiques renfermant du béryllium peut-être un peu allié à du sodium (cet excès de sodium, élément très positif, ne peut qu'accroître l'écart entre les périodes).

Le contenu de l'une des nacelles est ensuite transformé, dans sa nacelle, en fluorure de béryllium, celui de la seconde nacelle n'est pas altéré.

Il est important de noter que, selon ce mode opératoire, béryllium métal et fluorure ont subi les mêmes traitements et, par conséquent, contiennent les mêmes impuretés radioactives, s'ils en contiennent.

Les deux nacelles sont ensuite remplies de paraffine fondue qui par refroidissement immobilisera et protégera les matières actives. La nacelle qui renferme le métal constitue la source M, l'autre forme la source S.

4. **Principe des expériences.** — Le rayonnement de 480 keV accompagnant la capture par ^{7}Be permet de suivre l'activité relative des deux échantillons.

On a utilisé, pour la mesure des très petites différences d'intensité entre les sources M et S, deux chambres d'ionisation montées en système différentiel; le courant I_M produit dans une chambre par la source M est compensé par le courant I_S produit dans l'autre par la source S.

On réalise le montage de manière qu'au temps $t = 0$ les deux sources produisent le même courant dans les deux chambres; on a alors

$$I_M = I_S = I_0.$$

En admettant que la source S possède une probabilité plus faible de se transformer, les courants produits par les sources M et S au temps t sont

$$I_S = I_0\, e^{-\lambda t},$$
$$I_M = I_0\, e^{-(\lambda+\Delta\lambda)t}$$

d'où

$$\Delta I = I_S - I_M \simeq I_0\, e^{-\lambda t}\, t\, \Delta\lambda\,;$$

posons

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \eta,$$
$$\Delta T \simeq I_0\, \eta\, e^{-\lambda t}\, \lambda t.$$

La différence entre les courants passe donc par un maximum pour $t = \frac{1}{\lambda} \simeq 78$ jours. La valeur de ce maximum est $\Delta I = \frac{I_0}{e}$. (e, base des log népériens).

D'après les estimations théoriques précédentes,

$$\frac{\Delta T}{T} = \eta \simeq 1{,}3 \text{ pour } 100 \qquad \text{d'où} \quad \frac{\Delta I}{I_0} = \frac{\eta}{e} \simeq 5.10^{-3}$$

on peut donc s'attendre à une *différence relative maximum de l'intensité entre les sources de l'ordre de* 5.10^{-3} *au bout d'un temps égal à la vie moyenne du* ^{7}Be.

5. **Appareillage.** — *Description et caractéristiques.* — Le dispositif expérimental (*fig.* 1 *a* et 1 *a'*) se compose de deux chambres d'ionisation en cuivre de 1 mm d'épaisseur, portées à des tensions opposées de 90 V et contenant de l'air à la pression atmosphérique; les électrodes sont reliées à la grille G, isolée, d'une lampe électromètre triode (²) (type VX 32, $V_f = 1{,}3$ V, $I_f \simeq 10$ mA, $V_p \simeq 4{,}5$ V, $V_G \simeq -1{,}5$ V).

Les variations du courant de chauffage du filament sont compensées automatiquement grâce à un montage mis au point par l'un de nous [7]. Dans les conditions d'utilisation indiquées ci-dessus la pente de la lampe était 15 μA : V; les variations du courant étaient suivies à l'aide d'un galvanomètre de sensibilité telle qu'une variation de potentiel de la grille de 10^{-3} V correspondait à un déplacement du spot lumineux de 1,5 mm.

L'appareil est resté en fonctionnement ininterrompu pendant toute la durée de l'expérience, soit quatre mois, au cours desquels la dérive totale du spot lumineux n'a été que de 20 mm; ce qui correspond à une variation de potentiel de la grille de 15.10^{-3} V environ. Dans les conditions d'utilisation du dispositif expérimental, dont la capacité électrostatique était de l'ordre de 30 cm, la constante de temps était supérieure à 1 h.

Les expériences ont été réalisées au Laboratoire de Physique Cosmique de l'Observatoire de Meudon (Seine-et-Oise). On a pu utiliser la pièce d'une tour [10] particulièrement inactive, où l'intensité du rayonnement se trouve réduite par un écran quasi-sphérique de 1 m d'épaisseur d'eau distillée inactive, pesant 60 t (cette pièce sert d'ordinaire à effectuer des mesures sur le rayonnement cosmique). Le mouvement propre, à l'intérieur de la tour, est uniquement dû à la partie pénétrante du rayonnement cosmique. L'intensité absolue de ce rayonnement y est égale à 70 pour 100 de sa valeur à l'air libre (celle-ci a été déterminée par A. Rogozinski et M. Lesage [11] : $2{,}8.10^{-2}$ rayons $\times$ cm^{-2} $\times$ sec^{-1}). Cette valeur permet d'estimer le courant produit

(²) Cette lampe miniature nous a été obligeamment prêtée par le C. E. A. que nous remercions vivement.

par le rayonnement cosmique dans une de nos chambres d'ionisation, soit : $1,2 \cdot 10^{-6}$ u. e. s.

Or en l'absence de sources extérieures, l'intensité du courant produit dans une des chambres est environ $2 \cdot 10^{-6}$ u. e. s.; la différence, inférieure à 10^{-6} u. e. s., représente le léger courant résiduel dû principalement à des contaminations radioactives. Toujours en l'absence de sources extérieures, lorsque les chambres sont montées en système différentiel, on observe des déplacements du spot lumineux autour de la position zéro, d'amplitude moyenne de 5 mm (observations faites pendant plusieurs heures). Ces déplacements sont dus aux fluctuations du mouvement propre des deux chambres. Ces fluctuations correspondent à un courant moyen de $3 \cdot 10^{-17}$ A environ ($\leq 10^{-7}$ u. e. s.).

Sensibilité de la méthode. — La sensibilité de la méthode est limitée par les fluctuations statistiques des sources et du mouvement propre. Les sources M et S, à l'instant initial avaient une intensité I_0 égale entre elles à quelques pour cent près. Elles produisaient le même courant que le rayonnement γ fourni par une source de 40 μC de Ra placée au même endroit que la source de Be ($I_\gamma \simeq 3 \cdot 10^{-13}$ A). D'après des mesures antérieures effectuées avec des compteurs, chaque source émettait, au temps zéro, 10^5 rayons γ par seconde, dans l'angle solide (environ 10 pour 100) utilisé avec chaque chambre d'ionisation.

Les fluctuations statistiques du spot lumineux dues aux sources M et S représentaient 20 à 25 mm; ceci ne permet de mettre en évidence que des déplacements du spot supérieurs à environ 30 mm, ce qui correspond à une variation d'intensité relative $\frac{\Delta I}{I_0} \simeq 6 \cdot 10^{-4}$ (3). Cette variation est toutefois nettement supérieure à la variation relative maximum $\frac{\Delta I}{I_0} \simeq 5 \cdot 10^{-3}$ à laquelle on peut s'attendre d'après les calculs du paragraphe 4.

6. **Résultats expérimentaux.** — Au temps initial, les sources sont placées de manière à produire le même courant dans les deux chambres d'ionisation : le réglage approximatif est obtenu en faisant varier légèrement la distance des sources par rapport aux chambres d'ionisation; le réglage fin, en couvrant la source M d'écrans de Cu d'épaisseur convenable.

On observe alors, en fonction du temps, un déplacement lent de la position moyenne d'équilibre du spot dans un sens correspondant à une *augmentation apparente de l'intensité de la source* S; de déplacement atteint environ 150 mm en 30 jours. Lorsqu'on échange la position des sources M et S (position II), on constate que le déplacement du spot a lieu toujours dans le sens correspondant à une augmentation apparente de l'intensité de la source S.

On a représenté (*fig.* 1) les déplacements du spot lumineux pour les 30 premiers jours de l'expérience et pour les deux positions I et II occupées par les sources M et S; dans ces deux positions l'intensité relative de la source S semble augmenter par rapport à la source M.

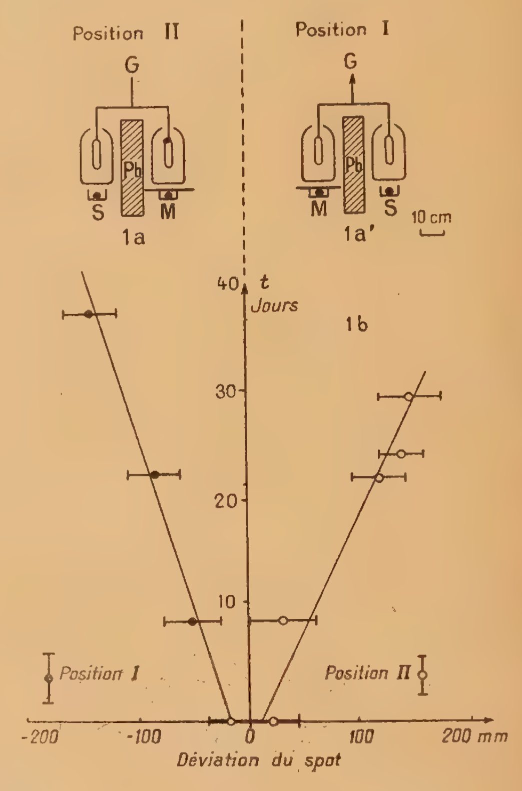


Fig. 1 *a* et 1 *a'*. — Schéma du dispositif expérimental (Positions I et II).

Fig. 1 *b*. — Courbes représentant, en fonction du temps, les déviations du spot lumineux pour les positions I et II des sources M et S.

On a également représenté (*fig.* 2) les déplacements du spot pour deux épaisseurs différentes d'écrans de Cu (entre la source M et la chambre d'ionisation correspondante).

7. **Discussion et interprétation des résultats expérimentaux.** — Les déplacements du spot ne peuvent être expliqués, ni par un phénomène parasite indépendant des sources, ni par une dissymétrie du dispositif expérimental, puisque l'effet se conserve lorsqu'on inverse la position des sources.

La cause de cette variation semble donc résider dans les sources elles-mêmes; cette cause peut provenir dans ce cas, soit d'une contamination des sources par un produit radioactif qui provoquerait -

(3) Cette sensibilité est meilleure que celle prévue dans notre précédent article [8].

le déplacement observé, soit d'une différence de période entre les sources S et M. En ce qui concerne la première possibilité, rappelons que les deux sources ont été préparées à partir du même échantillon de bérylium métal, dont une moitié a servi à former la source métal et l'autre moitié a subi la transformation fluorure. Toute contamination dans ce dernier traitement chimique semble totalement exclue. Les deux sources ont été enrobées ensuite dans la paraffine pour éviter toute modification de structure avec le temps sous l'influence de l'air et de l'humidité.

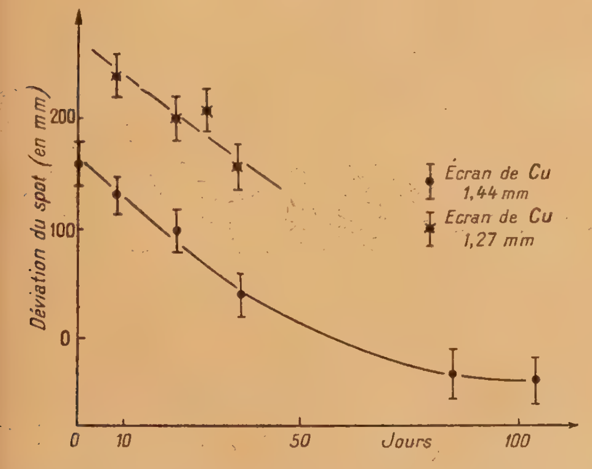


Fig. 2. — Déplacements, en fonction du temps, du spot lumineux pour deux épaisseurs d'écrans de cuivre sur la source M (Position II).

Nous sommes ainsi amené à supposer que la source M possède une probabilité légèrement plus grande de se transformer en Li que la source S.

D'après les calculs effectués au paragraphe 4 on peut écrire pour λt petit $\frac{\Delta I}{I_0} \simeq \lambda t \eta$. La variation relative d'intensité est bien proportionnelle au temps comme on l'a observé et le spot se déplace toujours vers la source qui possède la période la plus grande, soit en l'occurence vers la source S.

Détermination de l'ordre de grandeur de la différence relative entre les périodes des sources S et M. — *Les expériences précédentes permettent d'affirmer que les sources S et M ont une période légèrement différente, mais la détermination de la valeur précise de cette différence est délicate.*

Nous avons seulement déterminé l'ordre de grandeur de la différence relative entre les périodes des sources S et M. Pour effectuer cette détermination nous avons utilisé l'observation suivante : toute diminution au cours du temps de l'intensité relative de la source M peut être compensée en augmentant convenablement l'intensité absolue I_M produite par M dans la chambre d'ionisation correspondante. Cette augmentation de l'intensité I_M a été obtenue en diminuant l'épaisseur des écrans de Cu, placés entre la source M et la chambre d'ionisation.

Nous avons effectué cette expérience en utilisant les sources dans la position II. Au début de l'expérience (*fig.* 2), un écran de 1,44 mm de Cu était placé sur la source M et l'intensité $(I_M)_0$ produite par la source M, était légèrement supérieure à l'intensité $(I_S)_0 = I_0$ produite par la source S.

Nous avons représenté (*fig.* 2) les résultats de cette expérience : la courbe inférieure, correspondant à un écran de 1,44 mm de Cu sur la source M, indique les déplacements du spot lumineux pendant toute la durée de l'expérience; la courbe supérieure correspondant à un écran de 1,27 mm de Cu sur la source M, indique les déplacements du spot lumineux pendant les 40 premiers jours.

Posons :

$$I_S = I_0\, e^{-\lambda t};$$
$$I_M = I_0\,(1+\varepsilon)\, e^{-(\lambda+\Delta\lambda)t}.$$

A partir de ces équations on trouve que la différence relative d'intensité $\frac{\Delta I}{I_0}$ varie avec le temps suivant une loi (légèrement différente de celle trouvée au paragraphe 4)

$$\frac{\Delta I}{I_0} \simeq e^{-\lambda t}(\varepsilon - \lambda t \eta);$$

$\frac{\Delta I}{I_0}$ s'annule au temps t_1 pour $\varepsilon = \lambda t_1$; expérimentalement, on observe (*fig.* 2) que $\frac{\Delta I}{I_0} = 0$ pour $t_1 = 60$ jours, d'où $\frac{\varepsilon}{\eta} \simeq 0{,}75$ (à environ 10 pour 100.)

Exprimons que le spot lumineux peut être ramené au bout de 40 jours, à la position qu'il occupait au temps $t = 0$, en diminuant l'épaisseur des écrans sur la source M d'une quantité δm. En posant δI_t : différence des intensités entre les instants $t = 0$ et t, on peut écrire

$$\delta I_t = I_M \frac{\mu}{\rho}\,\delta m \sim I_0\, e^{-\lambda t} \frac{\mu}{\rho}\,\delta m,$$

$\frac{\mu}{\rho}$ étant le coefficient d'absorption massique du rayonnement de 480 keV dans le Cu.

D'autre part δI_t peut s'exprimer en fonction des variations avec le temps de la différence relative d'intensité $\frac{\Delta I}{I_0}$

$$\frac{\delta I_t}{I_0} = \left(\frac{\Delta I}{I_0}\right)_{t=0} - \left(\frac{\Delta I}{I_0}\right)_t \simeq \varepsilon - e^{-\lambda t}(\varepsilon - \lambda t \eta),$$

d'où l'on déduit

$$\varepsilon - e^{-\lambda t}(\varepsilon - \lambda t \eta) \simeq e^{-\lambda t} \frac{\mu}{\rho}\,\delta m$$

et finalement,

$$\frac{\Delta T}{T} = \eta \simeq \frac{\frac{\mu}{\rho}\,\delta m}{\frac{\varepsilon}{\eta}\,\frac{1-e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} + \lambda t}.$$

Cette formule permet de déterminer $\frac{\Delta T}{T}$ connaissant $\delta m = 150$ mg : cm², $t = 40$ jours, $\frac{\varepsilon}{\eta} \simeq 0{,}75$ déterminé ci-dessus et $\frac{\mu}{\rho}$, le coefficient $\frac{\mu}{\rho}$ correspondant à notre dispositif expérimental est difficile à préciser. Toutefois, la source M étant très près de la chambre d'ionisation, et aucune canalisation du rayonnement n'étant utilisée, on peut partiellement négliger la perte des photons par diffusion : le coefficient massique total $\left(\frac{\mu}{\rho}\right) = 8{,}6.10^{-2}$ [12] tandis que le coefficient de diffusion massique $\frac{\sigma \text{ diff}}{\rho} \simeq 4{,}10^{-2}$; la valeur de μ dans notre expérience est donc comprise entre 8.10^{-2} et 5.10^{-2} environ.

Si

$$\frac{\mu}{\rho} = 8.10^{-2} \quad \text{on trouve} \quad \frac{\Delta T}{T} \simeq 1{,}2 \text{ pour } 100,$$

$$\frac{\mu}{\rho} = 5.10^{-2} \quad \text{on trouve} \quad \frac{\Delta T}{T} \simeq 0{,}75 \text{ pour } 100.$$

On peut donc écrire, en tenant compte de l'erreur sur $\frac{\varepsilon}{\eta}$ (environ 10 pour 100)

$$0{,}7 \text{ pour } 100 < \frac{\Delta T}{T} < 1{,}3 \text{ pour } 100.$$

Par suite de la faible activité des sources utilisées, il n'a pas été possible d'obtenir mieux qu'un résultat qualitatif, et ceci malgré les conditions très favorables en ce qui concerne les mouvements propres des appareils.

Il serait très souhaitable de répéter les mêmes expériences avec des sources beaucoup plus intenses, afin de déterminer une valeur précise de la différence de période des sources de ^{7}Be à l'état de différentes combinaisons chimiques.

8. **Conclusion.** — Nous avons mis en évidence une faible différence de période entre deux sources radioactives de ^{7}Be : l'une dans l'état métallique, l'autre dans l'état de fluorure. Les résultats de nos expériences permettent d'affirmer que l'*ionisation du* ^{7}Be *augmente la période de capture du noyau d'environ* 1 *pour* 100.

Ces expériences montrent l'étroite dépendance qui existe entre la probabilité de transformation d'un noyau par capture d'électrons périphériques et la densité de ces électrons au voisinage du noyau; cette variation de période due à la capture des électrons L constitue aussi une preuve indirecte de l'existence de ce mode de capture (capture L).

Nous devons à la bienveillance du Professeur Dauvillier d'avoir pu effectuer ce travail dans son Laboratoire. Nous exprimons notre reconnaissance envers le Professeur I. Curie pour les conseils qu'elle nous a donnés.

Nous tenons à remercier le Professeur F. Joliot pour l'intérêt bienveillant porté à cette étude; nous remercions enfin M. Gondet, Directeur général des Laboratoires de Bellevue du C. N. R. S. pour l'aide qu'il nous a fournie dans la réalisation des appareils.

Note ajoutée sur épreuves. — E. Segré et C. E. Wiegand (*Phys. Rev.*, 75, **38**, 1949) viennent de publier un article sur le même sujet : Ces auteurs ont étudié la variation de période entre Be-métal et la forme BeO en utilisant la même méthode différentielle. Leurs résultats expérimentaux donnent une valeur relative

$$\frac{T(\text{BeO}) - T(\text{Be})}{T(\text{Be})} \doteq (3{,}0 \pm 1{,}8)\,10^{-4}$$

dans le même sens mais environ 50 fois plus faible que celle observée par nous entre Be-métal et la forme F_2Be.

Signalons enfin que la méthode différentielle utilisée dans les expériences de ces auteurs et dans les nôtres avait déjà été utilisée dans un but tout à fait analogue par Mme Curie (*Ann. de Physique*, **22**, 1924, p. 405) pour essayer de déceler une variation de période entre une ampoule de radon ordinaire et une ampoule de radon concentré sous très petit volume où les chocs sont nombreux.

Manuscrit reçu le 17 janvier 1949.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] E. Segré, *Phys. Rev.*, 1947, **71**, p. 274.
[2] R. Daudel, *La Revue Scientifique*, Paris, 1947, **85**, p. 162.
[3] R. Bouchez, R. Daudel, P. Daudel et R. Muxart, *J. Phys. Rad.*, 1947, **11**, p. 336.
[4] Slater, *Phys. Rev.*, 1930, **36**, p. 57.
[5] Pauling, Conférences d'Oxford, 1948.
[6] D'après les électronégativités et les courbes de Pauling.
[7] A. Rogozinski, *C. R. Acad. Sc.*, 1939, **208**, p. 427.
[8] R. Bouchez, R. Daudel, P. Daudel et R. Muxart *C. R. Acad. Sc.*, 1948, **227**, p. 525.
[9] Schmidt, *These Sciences*, Paris, 1929; *Annales de Chimie*, 10e série, **11**, p. 351.
[10] A. Dauvillier, *Bull. Astronomique*, 1937, **10**, p. 123.
[11] A. Rogozinski et M. Lesage, *C. R. Acad. Sc.*, 1948, **226**, p. 1131-1133.
[12] Tables de Constantes et données numériques, R. Grégoire, *Physique nucléaire*, Paris, 1948.

CHAMP MAGNÉTIQUE HOMOGÈNE À LIMITES CIRCULAIRES APPLICATION A LA SPECTROGRAPHIE DE MASSE

Par M. SPIGHEL.
Laboratoire de Physique atomique et moléculaire du Collège de France.

Sommaire. — Les progrès de la technique des sources d'ions dans ces dernières années permettent de supprimer le champ électrique cylindrique qui contribuait à la focalisation en énergie. L'influence du spectre d'énergie du faisceau d'ions sur la largeur des raies peut être considérablement diminuée par les deux facteurs suivants :

1° Progrès dans la stabilisation des tensions depuis dix ans.

2° Emploi de temps de pose réduit, par l'augmentation de la sensibilité de l'appareil, due à une meilleure focalisation en angle par la réduction de l'influence de l'ouverture du faisceau sur la largeur des raies.

Jusqu'ici les secteurs magnétiques employés dans les spectrographes de Baindbridge, de Jordan, de Mattauch, étaient à limites linéaires. L'emploi de faces ayant un certain rayon de courbure déterminé, permet de réaliser la linéarité de l'échelle de masse et l'annulation du coefficient de α^2 dans le développement de d; α étant l'ouverture du faisceau et d la distance sur la plaque de deux trajectoires voisines, l'une correspondant à la trajectoire moyenne.

La simplification dans le calcul, l'indépendance des différentes qualités exigibles d'un spectrographe de masse vis-à-vis des différents paramètres, facilitent l'étude de la géométrie du spectrographe de masse.

Il en résulte une amélioration dans la sensibilité qui sera très utile dans les différentes applications du spectrographe de masse.

1. Emploi d'un faisceau d'ions suffisamment isoénergétiques en spectrographie de masse. — Les techniques des sources d'ions et de la stabilisation des tensions ont fait des progrès ces dernières années du fait de leurs utilisations dans de nombreuses branches de physique nucléaire et atomique et dans l'optique électronique. Ces progrès changent le problème de la spectrographie de masse en le simplifiant.

Ils permettent de supprimer le champ électrique cylindrique des spectrographes de Baindbridge, Aston, Dempster (1), etc., qui avaient pour but la focalisation en énergie. Or l'on sait aujourd'hui produire des ions assez isoénergétiques pour que la précision des mesures de masse ne soit pas affectée par le faible spectre d'énergie restant. La largeur des raies peut être 20 à 50 fois supérieure à la précision de leurs mesures et comme, sans champ électrique, la dispersion de trajectoire due à une même variation relative de masse ou d'énergie, produit le même effet sur le point d'impact de la trajectoire avec la plaque photographique, une mesure au 1/200 000e des masses, par exemple, demande un faisceau d'ions isoénergétiques au 1/10 000e, ce que l'on sait faire aujourd'hui. (Les autres causes contribuant à la largeur des raies doivent être bien entendu, petites par rapport à celle due à l'existence du spectre d'énergie.)

2. Champ magnétique homogène à limites circulaires. — A. *Paramètres usuels.* — Les paramètres classiques (2), ε', ε'', l', l'', Ω, ne sont pas favorables à une étude systématique des caractéristiques suivantes (*fig.* 1).

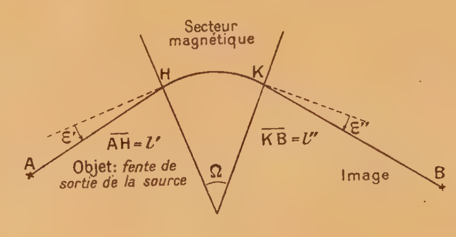


Fig. 1.

1° Focalisation en angle;

2° Mise en place de la plaque photographique

(1) L'analyse de ces appareils a été faite par R. HERZOG et V. HAUCK, *Z. f. Physik*, 1938, **108**, p. 609-634.

(2) Les notations employées sont celles de L. CARTAN, *J. de Phys. Rad.*, 1937, p. 453.

tangentiellement au lieu de focalisation en angle;

3° Grande constante de dispersion pour un encombrement minimum : longueur minimum de la trajectoire, diamètre minimum des pôles de l'électro-aimant;

4° Finesse des raies;

5° Réduction de l'influence de l'ouverture du faisceau d'ions sur la finesse des raies pour augmenter la sensibilité;

6° Linéarité de l'échelle des masses;

7° Grand pouvoir séparateur, fonction du 3° et du 4°.

Cette étude n'était pas commode car les différents paramètres agissent ensemble sur toutes les caractéristiques que l'on veut obtenir.

De plus au point de vue pratique la construction précise de l'appareil lorsque l'on donne à ε' et ε'' des valeurs différentes de zéro est assez délicate.

B. *Emploi de nouveaux paramètres.* — Nous supprimons les paramètres ε' et ε'' en les annulant et nous introduisons deux nouveaux paramètres :

Les rayons de courbure R' et R'' des côtés limitant le champ magnétique homogène; jusqu'à maintenant ces côtés étaient des droites.

R' et R'' seront positifs lorsque les faces auront leurs courbures du côté du champ magnétique, et négatifs dans le cas contraire.

Les calculs qui suivront montreront comment l'introduction de ces paramètres simplifient le problème, et permettent de satisfaire aux qualités exigibles d'un spectrographe de masse et énoncées plus haut.

Un raisonnement sommaire peut le montrer avant tout calcul (*fig.* 2).

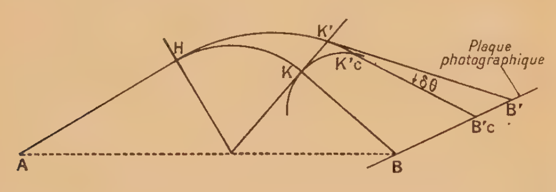


Fig. 2.

Soit AHKB la trajectoire de la masse m.
Soit AHK' B' la trajectoire de la masse $m(1 + \gamma)$.

$$\overline{BB'} = d = C_\gamma \times \gamma + C_{\gamma^2} \times \gamma^2.$$

En général [3], C_{γ^2} n'est pas nul : l'échelle des masses n'est pas linéaire. Mais si en K la limite du champ magnétique présente une courbure, la trajectoire H' K' est prolongée en K' K'_c d'une quantité du second ordre. (La tangente en K de la courbe limitant le champ magnétique est confondue avec le côté KK' linéaire.) L'angle $\delta\theta$ qui en résulte entre K' B' et la nouvelle trajectoire K'_c B'_c est aussi du second ordre, par rapport à γ infiniment petit du premier ordre et peut être tel que

$$\overline{B'B'_c} = - C_{\gamma^2} \times \gamma^2.$$

L'échelle de masse est devenue linéaire par l'introduction d'une courbure convenable.

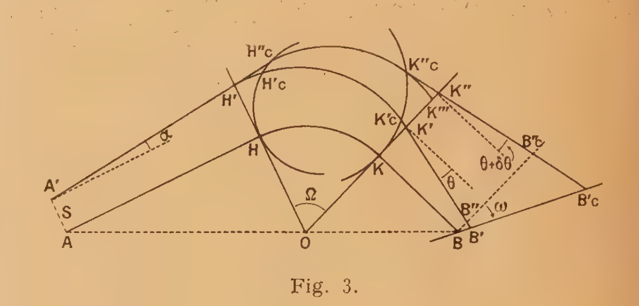


Fig. 3.

Comme les masses ne sont pas séparées en A, seul le rayon de courbure R'' de la face de sortie KK' jouera pour l'étude de la linéarité de l'échelle des masses. On conçoit de même que l'introduction du rayon de courbure R' de la face d'entrée du champ magnétique permette l'annulation du coefficient C_{α^2}. On gagnera soit en sensibilité, soit en finesse de raie, soit les deux.

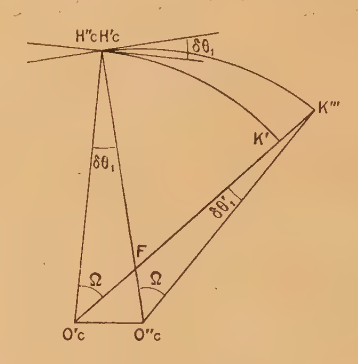


Fig. 4.

C. *Calcul des termes du développement de d* [4]. — On a défini R' et R'' et donné la convention de signe adoptée. Nous ne calculerons que les termes de correction dus à l'introduction des rayons de

[3]
$$d = C_\alpha \times \alpha + C_\gamma \times \gamma + C_s \times s + C_{\alpha^2} \times \alpha^2 + C_{\gamma^2} \times \gamma^2 + C_{\alpha\gamma} \times \alpha\gamma + \ldots$$

γ étant la variation relative de masse, s la largeur de la fente de la source, α l'inclinaison A' H' sur AH, d la distance BB', les différents coefficients ont été donnés par R. Herzog, *Z. Physik*, 1934, **89**, p. 447; W. E. Stephens, *Phys. Rev.*, 1934, **45**, p. 513; L. Cartan, *ouvrage cité*.

[4] α, s, γ, seront considérés comme les infiniments petits du premier ordre. Nous négligerons les termes du troisième ordre et au delà.

courbure R' et R'', nous servant des calculs de L. Cartan ([5]) pour les termes non modifiés (*fig.* 3 et 4).

AHKB est la trajectoire moyenne;

$A' H' H'_c K'_c K' B'' B'$ est la trajectoire sans courbure des faces;

$A' H' H''_c K''_c K'''$ est la trajectoire avec courbure de la face d'entrée du champ;

$A' H' H''_c K''_c K'' B''_c B'_c$ est la trajectoire avec courbure des faces d'entrée et de sortie du champ magnétique.

Les rayons de courbure de $\overparen{H''_c K''_c}$, $\overparen{H'_c K'_c}$ sont égaux entre eux, et égaux à un infiniment petit près du premier ordre au rayon de courbure de $\overparen{HK}$, c'est-à-dire égaux à ρ.

Le supplément de trajet $\overline{H' H''_c}$ sans champ magnétique introduit une différence angulaire $\delta\theta_1$, du second ordre entre les tangentes aux trajectoires en H'_c et H''_c, qui sont confondus au quatrième ordre près

$$\delta\theta_1 = \frac{\overline{H' H'_c}}{\rho} = \frac{\overline{HH'}^2}{2R'\rho},$$

O'_c étant le centre du cercle $\overparen{H'_c K'_c}$ et O''_c le centre du cercle $\overparen{H''_c K'''}$, $\overline{O' O''_c} = \rho\delta\theta_1$ au troisième ordre près.

Sur la figure 3, K''' est l'intersection du cercle $H''_c K'''$ avec OK'.

Sur la figure 4, K''' est l'intersection du cercle $\overparen{H''_c K'''}$ avec $O'_c K'$.

Ces deux positions de K''' sont à égale distance de K' au troisième ordre près et peuvent donc être confondues.

L'angle $\delta\theta'_1$ entre les tangentes en K' et K''' aux deux trajectoires est

$$\delta\theta'_1 = \frac{\overline{O'_c O''_c}}{\rho} \times \cos\Omega = \delta\theta_1 \times \cos\Omega \quad \text{au 3}^e\text{ ordre près.}$$

D'autre part

$$\overline{K'K'''} = \rho\,\delta\theta_1 \sin\Omega = \overline{O'_c K'''} - \overline{O'_c K'} = \overline{O'_c O''_c} \sin\Omega$$

au troisième ordre près.

L'introduction de la courbure en K change la trajectoire de $K''_c K'''$ en $K''_c K''$. K'' et K''' peuvent être confondus au quatrième ordre près; mais la différence angulaire $\delta\theta_2$ introduite entre les tangentes en K'_c et en K''' au cercle $H'_c K'_c$ est

$$\delta\theta_2 = \frac{\overline{K''_c K''}}{\rho} = \frac{\overline{KK'}^2}{2R''\rho}.$$

L'angle total $\delta\theta$ entre $K'' B''_c$ et $K' B''$ est donc

$$\delta\theta = \delta\theta'_1 + \delta\theta_2 = \frac{\overline{KK'}^2}{2R''\rho} + \frac{\overline{HH'}^2}{2R'\rho}\cos\Omega \quad \text{au 3}^e\text{ ordre près.}$$

et le décalage

$$\overline{K'K''} = \frac{\overline{HH'}^2}{2R'} \sin\Omega \quad \text{au 3}^e\text{ ordre près.}$$

On en déduit la valeur de $\overline{B'' B''_c}$,

$$\overline{BB''_c} = \left(\frac{\overline{KK'}^2}{R''} + \frac{\overline{HH'}^2}{R'}\cos\Omega\right)\frac{l''}{2\rho} + \frac{\overline{HH'}^2}{2R'}\sin\Omega$$

au troisième ordre près.

L. Cartan donne au deuxième ordre près,

$$\overline{HH'} = s + l'\alpha;$$

$$KK' = \rho\frac{\gamma}{2}(1 - \cos\Omega) + s\cos\Omega + \alpha(l'\cos\Omega + \rho\sin\Omega).$$

En posant

$$p = \frac{l'}{\rho}\sin\Omega - \cos\Omega, \qquad q = \frac{l''}{\rho}\sin\Omega - \cos\Omega$$

et en faisant $p.q = 1$, condition d'annulation du coefficient C_α, donc de focalisation en B, on doit ajouter à $\dfrac{d \times \cos\omega}{\rho}$ la quantité

$$\frac{1}{2}\,\frac{q + \cos\Omega}{\sin\Omega}\,\frac{\rho}{R''}\left[\frac{q + \cos\Omega}{q\sin\Omega}\alpha + \frac{s}{\rho}\cos\Omega + \frac{\gamma}{2}(1 - \cos\Omega)\right]^2 + \frac{\rho}{2R'}\left[\frac{s}{\rho} + \alpha\frac{1 + q\cos\Omega}{q\sin\Omega}\right]^2 \times \left[\frac{q + \cos\Omega}{\sin\Omega}\cos\Omega + \sin\Omega\right].$$

Le tableau des coefficients de d va devenir : (nous ne donnons pas les coefficients C_{s^2}, $C_{\gamma s}$, $C_{\alpha s}$ qui ne nous intéressent pas, car le coefficient C_s n'est jamais nul).

$$\frac{d \times \cos\omega}{\rho} = \begin{cases} \gamma \ldots\ldots & (1 + q) : 2 \\ s \ldots\ldots & -q \\ \alpha^2 \ldots\ldots & -\dfrac{1}{2}\left(q + \dfrac{1}{q^2}\right) + \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\rho}{q^2\sin^3\Omega}\left[\dfrac{(q + \cos\Omega)^3}{R''} + \dfrac{(1 + q\cos\Omega)^3}{R'}\right] \\ \gamma^2 \ldots\ldots & -\dfrac{1}{8}\left\{1 + 3q + 2\cos\Omega + \sin^2\Omega + 2\,\mathrm{tg}\,\omega\sin\Omega(1 + q) - \dfrac{q + \cos\Omega}{\sin\Omega}(1 - \cos\Omega)^2\dfrac{\rho}{R''}\right\} \\ \alpha\gamma \ldots & \dfrac{1}{2\sin\Omega}\left\{2 + \left(q + \dfrac{1}{q}\right)\cos\Omega + \dfrac{\sin^2\Omega}{q} + \mathrm{tg}\,\omega\sin\Omega\left(1 + \dfrac{1}{q}\right) + \dfrac{(q + \cos\Omega)^2}{q\sin\Omega}\,\dfrac{\rho}{R''}(1 - \cos\Omega)\right\}. \end{cases}$$

([5]) L'alignement de l'image B, de la source A et du sommet O du secteur magnétique est une propriété classique en spectrographie de masse.

Remarque. — Certains termes additifs avaient déjà été trouvés partiellement par Cartan (⁶). Mais il n'avait pu les utiliser en spectrographie de masse, le problème du point de vue discussion étant déjà assez compliqué.

3. **Application à la mesure des masses.** — 1° On doit placer la plaque tangentiellement au lieu de focalisation;

2° La linéarité de l'échelle de masse doit être effective

$$C_{\gamma^2} = 0, \qquad C_{\alpha\gamma} = 0.$$

L'élimination de ω entre ces deux équations nous fixe R'', puis connaissant R'', on en tire ω.

$$\frac{\rho}{R''} = -\frac{(q + 2q^2\cos\Omega - \cos^2\Omega)\sin\Omega}{(q+\cos\Omega)(1+\cos\Omega+2q)(1-\cos\Omega)}, \tag{1}$$

$$\operatorname{tg}\omega = -\frac{1}{2\sin\Omega(1+q)} \times \left\{ 1 + 3q + 2\cos\Omega + \sin^2\Omega + \frac{(q+2q^2\cos\Omega - \cos^2\Omega)(1-\cos\Omega)}{1+\cos\Omega+2q} \right\}. \tag{2}$$

Pour l'annulation au deuxième ordre inclus, de la largeur de raie due à l'angle d'ouverture du faisceau d'ions,

$$C_{\alpha^2} = 0.$$

$$\frac{\rho}{R'} = \frac{\sin\Omega}{(1+q\cos\Omega)^3} \times \left\{ \frac{(q+\cos\Omega)^2(q+2q^2\cos\Omega-\cos^2\Omega)}{(1-\cos\Omega)(1+\cos\Omega+2q)} + (1+q^3)\sin^2\Omega \right\}. \tag{3}$$

4. **Cas de spectrographes à récepteur électrique.** — Spectrographes de masse utilisés :

a. Comme séparateur d'isotopes;

b. Pour l'analyse chimique;

c. Pour la mesure des rapports d'abondance;

d. Pour la recherche des isotopes rares.

Tous ces spectrographes ont de commun leurs systèmes de réception. Ils font défiler les masses par une fente. La question de linéarité de l'échelle de masse n'a plus aucune importance. Seul subsiste, l'intérêt à annuler le coefficient C_{α^2} pour gagner en sensibilité ou en pouvoir séparateur.

$$q^3 + 1 = \frac{\rho}{\sin^3\Omega}\left[\frac{(q+\cos\Omega)^3}{R''} + \frac{(1+q\cos\Omega)^3}{R'}\right]. \tag{4}$$

Cette équation peut être satisfaite pour une infinité de systèmes de valeurs de R' et R''.

(⁶) Cartan, *Thèse*, 1938 ou *Ann. de physique*, 11ᵉ série, 1938, **10**.

Cas particulier : pièces polaires de révolution. — $R'' = R' = R$, R, rayon des pièces polaires cylindriques.

L'équation (4) devient

$$\operatorname{tg}\frac{\Omega}{2}\sin^3\Omega(1+q^3) = (q+\cos\Omega)^3 + (1+q\cos\Omega)^3. \tag{5}$$

En remarquant que $\frac{R}{\rho} = \operatorname{tg}\frac{\Omega}{2}$. La figure 5 montre

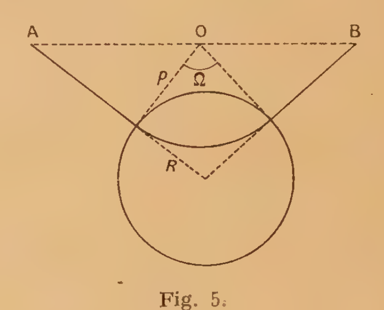


Fig. 5.

immédiatement cette propriété.

L'équation (5) est satisfaite, en particulier pour

$$q = 1, \qquad \Omega = \frac{\Pi}{2}.$$

5. **Discussion de ces dispositifs.** — Pour les séparateurs d'isotopes, il est intéressant de pouvoir utiliser le maximum de l'ouverture du faisceau pour avoir un meilleur rendement : or, c'est ce que permet la formule (4).

L'introduction des courbures des faces du champ magnétique homogène permet d'augmenter la finesse des raies et la sensibilité de ces appareils.

La finesse des raies, donc le pouvoir séparateur, ne dépendent plus que de la largeur de la fente de sortie de la source d'ions et de la stabilisation en énergie effectivement réalisée.

On peut d'ailleurs négliger l'influence de la largeur de la fente de sortie, en formant de celle-ci une image intermédiaire, de grandeur réduite, par l'introduction d'une lentille électrostatique.

Si la stabilisation en énergie du faisceau d'ions est de $\frac{1}{\eta}$ comme la largeur des raies ne dépend plus d'après ce qui précède que de cette stabilisation, et comme l'influence d'une variation relative d'énergie sur le rayon ρ des cercles-trajectoires dans le champ magnétique est identique à celle d'une même variation relative de masse, le pouvoir séparateur est voisin de η. Mais comme la sensibilité est augmentée par l'utilisation d'une plus grande ouverture du faisceau d'ions, on peut réduire le temps de pose, et dans cet intervalle de temps plus faible la tension peut paraître mieux stabilisée qu'elle ne l'est en réalité. En fait le pouvoir séparateur pourra être

plus grand que η et l'on peut espérer atteindre celui réalisé par Jordan [7] en 1942, avec les stabilisations de tensions que l'on sait réaliser aujourd'hui.

D'après les remarques ci-dessus, il apparaît nécessaire d'introduire un obturateur sur le parcours des ions, pour que la plaque ne soit « éclairée » que pendant de courts intervalles de temps de pose. L'emploi de plaques photographiques sensibles s'impose. L'emploi de sources d'ions à grand débit serait avantageux jusqu'à une certaine limite : Il ne faut pas que la charge d'espace du faisceau élargisse trop les raies.

6. **Constante de dispersion.** — Auparavant, dans le développement de d les mêmes paramètres agissaient sur les termes du premier et du deuxième ordre et l'on ne pouvait étudier systématiquement et séparément chaque qualité désirée, en particulier la constante de dispersion. L'introduction des rayons de courbure comme paramètres, n'influençant que les termes du deuxième ordre, assure la linéarité, la finesse des raies, après que la géométrie de l'appareil ait été fixée, pour qu'une constante de dispersion maximum corresponde à une longueur minimum de trajectoire et à un diamètre des pôles de l'électroaimant minimum.

L'étude de la dispersion dépend de q et de Ω; q et Ω ainsi fixés, ω, R' et R'' seront donnés par les formules écrites plus haut.

7. **Objections.** — A. On ne peut calculer les termes du troisième ordre, car cela n'aurait aucune signification physique, étant donné l'existence du champ de fuite magnétique. On ne peut donc connaître et apprécier le gain qu'assure notre procédé sur la finesse des raies, la sensibilité et le pouvoir séparateur. Nous pouvons seulement affirmer que ce gain existe sans connaître sa grandeur.

B. L'introduction de contours circulaires ne changent les angles et les distances que de quantités du second ordre. L'existence du champ de fuite *déplace d'une façon inconnue* les angles et les distances de quantités du second ordre.

Ou l'on pense que ce déplacement est le même pour toutes les raies et ne modifie pas les calculs de linéarité et de focalisation, ce que les réalisations déjà effectuées en spectrographie de masse laissent espérer; ou l'on pense qu'il les modifie et ces calculs de termes du second ordre n'ont plus de sens.

Seule la construction d'un spectrographe de masse basé sur ces principes et ces calculs pourra en légitimer leurs validités.

8. **Conclusions.** — Nous prévoyons donc pour un spectrographe de masse :

1° La suppression du champ électrique cylindrique;

2° L'introduction d'une lentille électrostatique;

3° La création de courbure des faces limitant le champ magnétique;

4° Un obturateur pour la réduction des poses.

Il en découlera :

Où 1°, une amélioration du pouvoir séparateur; où 2°, un gain de sensibilité; d'où, pour les applications du spectrographe de masse :

1° Résolution possible en doublets de certaines raies considérées jusqu'ici comme simples;

2° Recherche des isotopes rares;

3° Mesure des rapports d'abondances des isotopes rares;

4° Meilleur rendement dans la séparation électromagnétique des isotopes.

9. **Application à l'analyse des énergies.** — L'étude des champs magnétiques homogènes que nous avons appliquée à la spectrographie des masses peut s'étendre à l'analyse en énergie d'un faisceau d'ions de même masse. Les formules que nous avons données pour le cas d'un récepteur électrique, ou pour le cas d'une plaque photographique, s'appliquent à l'analyse des énergies. Les mêmes avantages, augmentation du pouvoir séparateur ou de la sensibilité, sont valables pour la spectrographie des énergies. γ ne représente plus la variation relative en masse, mais la variation relative en énergie.

10. **Remarques.** — 1° La réalisation d'un appareil, basé sur ces calculs n'a de sens que si une étude expérimentale poussée du champ magnétique utilisé est faite, afin de rendre négligeable l'influence du champ de fuite.

2° La précision dans la mesure des masses est limitée par la nature de la méthode employée. En effet, la précision donnée par un appareil de mesure est limitée par la précision avec laquelle sont définies les constantes physiques de l'appareil. Or, dans un spectrographe de masse, les constantes physiques sont les constantes électriques, tension et champ magnétique. La stabilité des tensions et des intensités de courant, par conséquent, le pouvoir séparateur et la précision dans la mesure des masses ne peuvent être améliorés indéfiniment, car la stabilisation revient à avoir une tension de référence, rarement définie à plus de 1/20 000e près.

3° En réalité, la constante physique d'un spectrographe de masse est $\frac{\sqrt{V}}{H}$ (V est la tension d'accélération des ions, H, la valeur du champ magnétique). Peut-elle être définie avec une meilleure précision? La méthode qui consiste à employer un tube de référence (cette méthode est employée aux U. S. A.

[7] Jordan indiquait un pouvoir séparateur théorique de 29 000 (*Phys. Rev.*, 1940, **57**, p. 1072).

pour la stabilisation des Van de Graff) peut permettre, semble-t-il, de l'espérer.

Notes. — 1° Smythe, Rumbaugh et West (*Phys. Rev.*, 1934, **45**, p. 724) avaient utilisé un secteur magnétique de 90°, limité par des cercles de rayon $R_1 = \rho$ et $R_2 = -\sqrt{2}.\rho$, pour donner d'une source large, émettant un faisceau parallèle dans une direction unique une image ponctuelle et ceci, pour une masse unique. Ce cas particulier ne peut servir à vérifier les formules ci-dessus, car $(\varepsilon' = \pi$ et $\varepsilon'' = 0)$ ε' et ε'' n'avaient pas dans leurs dispositifs les valeurs nulles que je leur donne *a priori* dans cette étude.

2° Kenneth T. Baindbridge, dans son rapport au VIIe Conseil de Chimie Solvay, 1948, p. 61, soulignait l'intérêt qu'il y avait d'étudier le cas de pôles à limites circulaires.

Ce travail a été effectué au Laboratoire de Physique Atomique et Moléculaire du Collège de France, sous la direction de M. Claude Magnan. Je tiens à remercier vivement Mme I. Joliot-Curie, et M. Francis Perrin, mes parrains du C. N. R. S., pour l'appui bienveillant qu'ils m'ont donné.

Notes ajoutées à la correction des épreuves. — 1° Ce travail a été terminé en juin 1948 et présenté, à cette date, à M. Francis Perrin.

2° Larkin Kerwin a développé dans *Rev. Sc. Inst.*, 20, **36**, 1949, une étude sur la focalisation des particules chargées dans un champ magnétique homogène à limites courbes.

Son travail consiste à prendre :

1° $q = p = 1$;

2° $R' = R'' = R$;

3° $\varepsilon' = \varepsilon'' = \varepsilon$.

Il lui reste les variables R et ε à sa disposition pour l'étude des aberrations du second ordre.

Manuscrit reçu le 18 février 1949.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE ET LE RADIUM. SÉRIE VIII, TOME X, JUIN 1949.

SUR LA CONSTRUCTION DES COMPTEURS GEIGER-MÜLLER DU TYPE MÉTALLIQUE

Par M. LESAGE, A. ROGOZINSKI et A. VOISIN.

Laboratoire de Physique Cosmique de l'Observatoire de Meudon.

Sommaire. — Détails de préparation et de construction de compteurs métalliques dont l'assemblage est assuré uniquement par des soudures à l'étain, par des brasures et par une soudure verre-métal pour la sortie isolée.

Depuis plusieurs années nous utilisons, dans nos recherches sur le rayonnement cosmique, un grand nombre de compteurs Geiger-Müller du type métallique, qui nous donnent toute satisfaction, tant au point de vue de leur préparation que de leur fonctionnement et de leur emploi.

La façon de construire ces compteurs que nous avons mise au point permet d'obtenir un rendement de fabrication voisin de 100 pour 100 et ne met en œuvre que des moyens réduits, à la portée de la plupart des laboratoires.

Il nous a donc paru utile de signaler brièvement la technique employée, qui s'inspire, d'ailleurs, dans

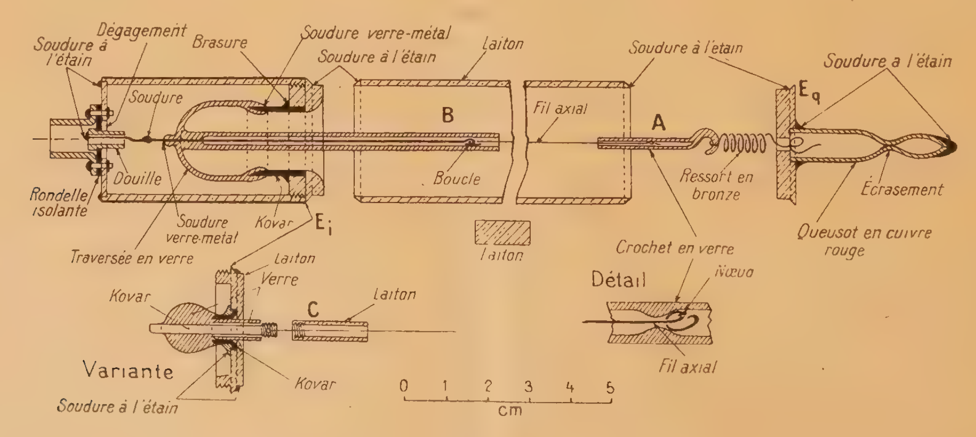


Fig. 1.

une certaine mesure, de celle développée par V. H. Regener et par d'autres auteurs (1).

Les compteurs que nous allons décrire se composent essentiellement d'une anode constituée par un fil tendu dans l'axe d'un tube métallique, formant cathode, et de deux embouts également métalliques, dont l'un (E_i) comporte une sortie isolée en verre et l'autre (E_q) le queusot de remplissage (*voir* figure). L'étanchéité des passages et des joints du compteur est assurée uniquement par des soudures, à l'exclusion de tous mastics.

1. **Enveloppe.** — L'enveloppe du compteur est constituée par un cylindre en laiton de 1 mm d'épaisseur. Le choix de cette épaisseur résulte d'un compromis entre la nécessité d'assurer, d'une part, une étanchéité suffisante du compteur et, d'autre part, une transparence aussi élevée que possible au rayonnement cosmique. Signalons que le laiton commercial est parfois poreux, même pour une épaisseur de 1 mm. Aussi est-il nécessaire de s'assurer de son étanchéité par des essais préalables. Disons à ce sujet que les tubes étirés sont préférables aux tubes soudés. D'autres métaux, tels que le nickel et le cuivre rouge spécialement traité, conviendraient probablement mieux, mais il est malheureusement encore difficile de se les procurer.

Traitement de la surface interne. — Ce traitement comprend les opérations suivantes :

1° Un premier nettoyage à l'aide d'un produit courant de polissage des métaux;

2° Un décapage chimique par l'acide nitrique, dilué dans environ 10 volumes d'eau;

3° Un rinçage prolongé à l'eau;

4° Un polissage au moyen d'un tampon de laine d'acier;

5° Un nettoyage et un rinçage à l'alcool à l'exclusion d'autres produits et, surtout, du benzène lequel, comme l'expérience nous l'a montré, risque de compromettre le bon fonctionnement du compteur. Notons cependant que l'alcool pourrait être remplacé par l'éther.

Le tube ainsi préparé doit être immédiatement mis à l'abri de l'action nocive de toute poussière.

Entre les opérations 3° et 4°, il convient d'étamer les bords du tube que l'on a préalablement chanfreinés.

(1) S. A. Korff, *Electron and Nuclear Counters*, New York, 1946. — V. H. Regener, *Rev. Scient. Instr.*, 1947, **18**, p. 267. — M. H. Shamos et I. Hudes, *Rev. Scient. Instr.*, 1947, **18**, p. 586. — M. Miesowicz et L. Jurkievicz, *Acta. Phys. Pol.*, 1947, **9**, p. 54. — D. R. Corson et R. R. Wilson, *Rev. Scient. Instr.*, 1948, **19**, p. 257. — R. Berarda, C. Mezzetti et E. Pancini, *Nuovo Cimento*, 1948, p. 370.

2. **Fil axial.** — Le fil axial est généralement constitué par un fil de tungstène de 0,1 mm de diamètre. Nous avons également obtenu de bons résultats avec le molybdène, l'acier inoxydable et la platinite. La nature et l'état de surface de l'anode semblent d'ailleurs avoir peu d'influence sur le fonctionnement et sur les caractéristiques du compteur (2).

Le fil comporte à l'une de ses extrémités une boucle et à l'autre un nœud; la boucle est accrochée à la tige métallique qui traverse la sortie isolée, tandis que le nœud est fixé à un crochet en verre (A), constitué par un capillaire en pyrex de 3 mm de diamètre extérieur.

3. **Sortie isolée.** — Nous employons, indifférement, deux modèles de sortie isolée (3). Le premier comporte une soudure verre-métal, réalisée à l'aide d'une collerette en kovar, brasée à une rondelle en laiton qui forme l'un des embouts (E_i) du compteur. Le second est constitué par une perle en verre-kovar d'un type courant dans le commerce; son mode de fixation est clairement visible sur la figure (variante).

Le tube de protection qui sert à délimiter la longueur utile du fil axial est en verre dans le premier modèle (B) et en métal dans le second (C). Dans ce dernier cas, il est recommandé d'arrondir les angles vifs des bords du tube de protection, afin d'en supprimer l'action perturbatrice.

4. **Queusot.** — L'un des embouts (E_q) comporte un trou central d'évacuation et un chambrage, où s'engage le queusot qui sera ultérieurement soudé à cette pièce. Le queusot est un tube en cuivre rouge de 3 mm de diamètre intérieur, de 5 mm de diamètre extérieur et d'environ 50 mm de longueur.

5. **Assemblage.** — Tous les endroits à souder sont préalablement étamés, afin d'éviter l'emploi d'un décapant au moment de la soudure. Une fois étamées, les pièces sont soigneusement nettoyées à l'alcool. L'assemblage du compteur est alors effectué dans l'ordre suivant :

1° On commence par introduire le fil axial, muni seulement de son nœud, dans le tube capillaire en pyrex (A), qui comporte un étranglement destiné à retenir le fil par son nœud.

2° Une extrémité de ce tube est alors recourbée de façon à servir de crochet au ressort en bronze phosphoreux qui tend le fil axial.

3° C'est alors que l'on fait la boucle à un endroit du fil tel que, une fois accroché dans le tube (B),

(2) Le fil doit naturellement être parfaitement uni et exempt de toute trace de poussière.

(3) Nous procédons actuellement à des essais avec une sortie isolée en stéatite.

le fil présente la longueur voulue dans sa partie non protégée par les deux tubes de délimitation (A) et (B).

4° Après avoir introduit le fil axial dans l'enveloppe du compteur et engagé l'embout isolé (E_i), on met en place l'embout (E_q), en ayant soin de tendre le ressort dont on a fait sortir l'extrémité à travers l'orifice de l'embout. Une tension du ressort de l'ordre de 100 à 200 g est généralement suffisante. Le ressort ainsi tendu est retenu dans l'embout par une petite boucle.

5° On procède finalement à la soudure des embouts, qui est suivie de celle du queusot. Le compteur est alors prêt à être monté sur le banc de pompage.

6. **Remplissage et scellement.** — On procède habituellement au remplissage simultané de plusieurs compteurs que l'on vide d'abord pendant au moins 2 h. Une bonne pompe à palettes suffit en général. Pendant l'opération de pompage, il est utile de dégazer les parois des compteurs, en les chauffant à 100-150°.

Nous n'avons utilisé jusqu'ici qu'un mélange d'argon et d'alcool pour remplir les compteurs. Les opérations de remplissage, d'ailleurs bien connues, que nous rappelons ici brièvement, comportent :

1° Un rinçage préalable à l'argon (impuretés de l'argon utilisé : 0,01 pour 100 d'oxygène et 0,5 pour 100 d'azote);

2° L'introduction d'alcool absolu sous une pression de 11 mm Hg;

3° Afin de conserver pendant les opérations ultérieures une pression égale d'alcool dans tous les compteurs, on les isole de la canalisation de pompage à l'aide de robinets, on évacue ensuite l'alcool de celle-ci et l'on y introduit de l'argon sous la même pression de 11 mm Hg;

4° Les compteurs sont remis en communication avec la canalisation et le remplissage est complété aussitôt avec de l'argon, jusqu'à une pression totale de 110 mm Hg. Le bon fonctionnement des compteurs est vérifié avant leur scellement, alors qu'ils se trouvent encore sur le banc de pompage.

Chaque compteur est scellé, en écrasant son queusot à l'aide d'une pince spécialement adaptée à cet effet; celle-ci est munie d'une butée d'arrêt, destinée à éviter le sectionnement du queusot lors de cette opération. Le queusot est ensuite cisaillé aussi près que possible de la partie écrasée et la tranche obtenue soudée à l'étain, afin d'éviter toute entrée possible d'air. C'est seulement à ce moment que l'on retire la pince.

7. **Régénération des compteurs.** — Nous nous bornerons simplement à signaler ici quelques procédés que nous avons utilisés avec succès pour obtenir la régénération des compteurs.

On constate que le fonctionnement du compteur devient défectueux après un service prolongé, ou par suite d'une trop forte surtension, ou encore par suite d'un refroidissement excessif du compteur. Le palier diminue alors progressivement, le seuil remonte et, dans certains cas, les impulsions du compteur cessent d'avoir une amplitude égale. Il a été signalé par plusieurs auteurs que, dans ces conditions, la vapeur organique contenue dans le compteur se décompose, la cathode subit une modification qui se traduit par l'abaissement de son seuil photoélectrique, ce qui expliquerait, en particulier, l'apparition de décharges multiples, même pour des tensions au-dessus du seuil relativement faibles.

Un nouveau remplissage d'un tel compteur ne l'améliore pas sensiblement et, le plus souvent, demeure sans effet. Toutefois, il suffit de le mettre pendant plusieurs mois en communication avec l'air ambiant pour que, après un nouveau remplissage, il recouvre spontanément ses qualités.

Dans certains cas, où nous avions besoin de réutiliser immédiatement des compteurs devenus défectueux, nous avons réussi à obtenir leur régénération immédiate et radicale, soit en faisant subir une passe mécanique à la surface interne de l'enveloppe, soit en chauffant celle-ci au rouge sombre à l'air libre; ces méthodes présentent cependant l'inconvénient de nécessiter le démontage du compteur.

En ce qui concerne l'inégalité des impulsions, elle doit probablement être imputée au fil axial. En effet, on observe, notamment dans le cas d'une forte surtension, que le fil axial présente des rugosités susceptibles de limiter la propagation de la décharge à des parties plus ou moins longues du fil.

Nous avons constaté qu'un simple chauffage du fil n'est pas suffisant pour remédier à ce défaut et nous étions amenés, dans la plupart des cas, à changer le fil.

Nous tenons à remercier vivement M. A. Dauvillier, Directeur du Laboratoire, pour l'intérêt qu'il a pris à ce travail.

Manuscrit reçu le 11 mars 1949.

SUR LES ÉQUATIONS D'ONDES DE LA THÉORIE DU CORPUSCULE DE SPIN $\frac{h}{2\pi}$ ET LEURS GÉNÉRALISATIONS

Par Gérard PETIAU.
Institut Henri Poincaré.

Sommaire. — Examen et discussion de diverses généralisations des équations d'ondes du corpuscule de spin $\frac{h}{2\pi}$ obtenues par la méthode de fusion de M. Louis de Broglie. On montre comment l'extension de cette méthode au cas du couplage étroit complet entre deux corpuscules de spin $\frac{h}{4\pi}$ de masses propres différentes conduit à une représentation du corpuscule de spin $\frac{h}{2\pi}$ dans laquelle celui-ci peut être considéré comme possédant plusieurs états de masse propre. La théorie exposée permet notamment de retrouver et d'interpréter les théories proposées par divers auteurs, soit pour représenter le méson, soit pour servir de base à des électrodynamiques généralisées.

1. La discussion des caractères respectifs des corpuscules de spin $\frac{h}{2\pi}$ et $\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}$ a conduit M. Louis de Broglie (¹) à proposer, dans le cas particulier du photon, une théorie du corpuscule de spin $\frac{h}{2\pi}$ dans laquelle ce corpuscule est considéré comme résultant de l'union étroite ou fusion de deux corpuscules de spin $\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}$ représentés individuellement par des solutions de l'équation d'ondes relativiste de Dirac (²).

Considérons deux corpuscules dont les fonctions d'ondes sont solutions des équations d'ondes du corpuscule de Dirac en l'absence d'actions extérieures

$$[p_\mu(\gamma^\mu)_{i_1m_1} + im_0c\,\delta_{i_1m_1}]\psi_{m_1} = 0, \qquad (1)$$

$$[p_\mu(\gamma^\mu)_{i_2m_2} + im_0c\,\delta_{i_2m_2}]\psi_{m_2} = 0, \qquad (2)$$

$$\left(p_\mu = i\hbar\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad x^\mu = x, y, z, ict, \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}\right),$$

$$(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\delta^{\mu\nu}),$$

$$(\mu, \nu = 1, 2, 3, 4; \ i_1, i_2, m_1, m_2 = 1, 2, 3, 4).$$

(¹) Louis de Broglie, *Une nouvelle conception de la lumière*, I et II (*Actualités scientifiques*, Hermann, Paris, I, 1934, nº **181**; II, 1936, nº **411**).
Une nouvelle théorie de la lumière. La mécanique ondulatoire du photon, 1940, **1**; 1942, **2**, Paris, Hermann et Cie, éditeurs.
Théorie générale des particules à spin, Paris, 1943, Gauthier-Villars; *Mécanique ondulatoire du photon et théorie quantique des champs*, Paris, Gauthier-Villars, 1948.
(²) P. A. M. Dirac, *Les principes de la mécanique quantique*. — L. de Broglie, *L'électron magnétique* (Théorie de Dirac).

Le corpuscule de spin $\hbar$ sera représenté par un système de 16 fonctions d'ondes ψ_{i_1,i_2} susceptibles d'être considérées comme des produits de solutions des équations (1) et (2) et par suite, solutions sous les conditions ordinaires de la mécanique ondulatoire de l'équation d'ondes

$$\left[p_\mu\frac{1}{2}[(\gamma^\mu)_{i_1m_1}\delta_{i_2m_2} + \delta_{i_1m_1}(\gamma^\mu)_{i_2m_2}] + ic\mu_0\,\delta_{i_1m_1}\delta_{i_2m_2}\right]\psi_{m_1m_2} = 0 \qquad (3)$$

dans laquelle $\mu_0 = 2m_0$ est la masse propre du corpuscule résultant après l'opération de fusion des deux corpuscules constituants.

Nous désignerons par γ^a les 16 matrices du système dont les γ^μ sont les générateurs

$$(\gamma^a = \gamma^0, \quad \gamma^\mu, \quad \gamma^{[\mu\nu]} = \gamma^\mu\gamma^\nu - \delta^{\mu\nu},$$

$$\gamma^{[\mu\nu\rho]} = \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho - \gamma^\mu\delta^{\nu\rho} + \gamma^\nu\delta^{\mu\rho} - \gamma^\rho\delta^{\mu\nu},$$

$$\gamma^{[\mu\nu\rho\sigma]} = \gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4)$$

et nous écrirons $\gamma^a_{(1)}$ pour $(\gamma^a)_{i_1m_1}$, $\gamma^a_{(2)}$ pour $(\gamma^a)_{i_2m_2}$. La théorie du corpuscule représenté par les solutions de (3) fera intervenir des matrices

$$\left.\begin{aligned} \Gamma_{a,b} &= \Gamma_{b,a} = \frac{1}{2}[\gamma^a_{(1)}\gamma^b_{(2)} + \gamma^b_{(1)}\gamma^a_{(2)}], \\ J_{a,b} &= -J_{b,a} = \frac{1}{2}[\gamma^a_{(1)}\gamma^b_{(2)} - \gamma^b_{(1)}\gamma^a_{(2)}], \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

satisfaisant aux lois de composition

$$\left.\begin{aligned} \Gamma_{a,c}\Gamma_{c,d} &= \frac{1}{2}[\Gamma_{ac,bd} + \Gamma_{ad,bc}], \\ J_{a,b}J_{c,d} &= \frac{1}{2}[\Gamma_{ac,bd} - \Gamma_{ad,bc}], \\ \Gamma_{a,b}J_{c,d} &= \frac{1}{2}[J_{ac,bd} + J_{ad,bc}], \\ J_{a,b}J_{c,d} &= \frac{1}{2}[J_{ac,bd} - J_{ad,bc}]. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

(nous avons posé $\gamma_{ab} = \gamma_a\gamma_b$).

Introduisant les matrices

$$\Gamma^\mu = \Gamma^{\mu,0} = \frac{1}{2}[\gamma^\mu_{(1)}\gamma^0_{(2)} + \gamma^0_{(1)}\gamma^\mu_{(2)}], \quad (6)$$

l'équation (3) s'écrit

$$[p_\mu\Gamma^\mu + i\mu_0 c]\psi_{i_1 i_2} = 0. \quad (7)$$

Si nous considérons les opérateurs

$$S = p_\mu\Gamma^\mu, \quad S' = p_\mu J^\mu, \quad (8)$$

les lois de composition (5) nous montrent que l'on a

$$\left.\begin{aligned} S^2 + S'^2 &= p_\mu p^\mu = -\hbar^2\square, \\ SS' &= S'S = 0. \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

A partir de l'équation (7) (μ_0 étant différent de zéro), on obtient immédiatement l'équation complémentaire

$$S'\psi = 0. \quad (10)$$

D'autre part, multipliant (7) par l'opérateur

$$S'^2 + i\mu_0 c S + \mu_0^2 c^2, \quad (11)$$

on voit que les fonctions ψ solutions de (7) satisfont également à l'équation du second ordre

$$\left[\square - \frac{\mu_0^2 c^2}{\hbar^2}\right]\psi = 0. \quad (12)$$

L'examen du système des matrices Γ^μ montre que celles-ci satisfont aux relations algébriques

$$\Gamma^\mu\Gamma^\nu\Gamma^\rho + \Gamma^\rho\Gamma^\nu\Gamma^\mu = \Gamma^\mu\delta^{\nu\rho} + \Gamma^\rho\delta^{\mu\nu}, \quad (13)$$

à partir desquelles on peut édifier la théorie (3) du corpuscule de spin $\hbar$.

La discussion de la réductibilité du système (13) dans le cas où l'on considère quatre matrices Γ^μ conduit à introduire les trois commutateurs du système qui se déduit des Γ^μ, commutateurs qui, avec la représentation des Γ^μ que nous utilisons, s'écrivent

$$\left.\begin{aligned} C_0 = 1, \quad C_1 &= \gamma^\mu_{(1)}\gamma^{(2)}_\mu - \gamma^{(1)}_{(\mu\nu)}\gamma^{(\mu\nu)}_{(2)}, \\ C_2 &= \gamma^{(1)}_{(\mu\nu\rho)}\gamma^{(\mu\nu\rho)}_{(2)} - \gamma^{(1)}_{(\mu\nu\rho\sigma)}\gamma^{(\mu\nu\rho\sigma)}_{(2)}. \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

(3) *Voir*, par exemple, G. PETIAU, *Thèse*, Paris, 1936 et *Mémoires Ac. Roy. Sc.*, Belgique, 1936.

(4) Pour une discussion détaillée de la réductibilité du système des Γ^μ, *voir*, par exemple, G. PETIAU, *Revue scientifique*, 1945, **83**, p. 67-74.

Les propriétés de ces commutateurs conduisent à la conclusion que la représentation (6) des matrices Γ^μ est réductible en trois représentations de rangs 10, 5 et 1 et que par suite le système des équations d'ondes (3) ou (7) est décomposable en trois systèmes composés chacun de 10, 5 ou 1 équations.

Considérons l'équation (3). Posant

$$\psi_{i_1 i_2} = (\gamma_{1234})_{i_2 m_2}\psi'_{i_1 m_2}, \quad (15)$$

cette équation s'écrit encore

$$[p_\mu J^\mu + i\mu_0 c]\psi' = 0 \quad (16)$$

ou

$$[S' + i\mu_0 c]\psi' = 0.$$

Par suite, il y a équivalence entre les systèmes

$$[S + i\mu_0 c]\psi = 0, \quad \text{d'où} \quad S'\psi = 0 \quad (17)$$

et

$$[S' + i\mu_0 c]\psi' = 0, \quad \text{d'où} \quad S\psi' = 0. \quad (18)$$

Si l'on veut mettre en évidence les représentations irréductibles dans ces systèmes, il est commode de remplacer les fonctions d'ondes spinorielles $\psi_{i_1 i_2}$ par des fonctions d'ondes tensorielles Φ^A définies à partir de $\psi_{i_1 i_2}$ par

$$\Phi^A = (R\gamma^A)_{i_2 i_1}\psi_{i_1 i_2} \quad (19)$$

en introduisant la matrice R telle que

$$R\gamma^\mu R^{-1} = -\gamma^{\mu+}, \quad R^+ = R, \quad (20)$$

d'où

$$\left.\begin{aligned} R\gamma^{\mu\nu}R^{-1} &= -(\gamma^{\mu\nu})^+, \\ R\gamma^{[\mu\nu\rho]}R^{-1} &= [\gamma^{[\mu\nu\rho]}]^+, \\ R\gamma^{[\mu\nu\rho\sigma]}R^{-1} &= [\gamma^{[\mu\nu\rho\sigma]}]^+. \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

(Nous désignons par A^+ la matrice transposée de la matrice A, $(A)^+_{ij} = A_{ji}$.)

Le système (17) nous donne alors les trois systèmes tensoriels irréductibles

$$\left.\begin{aligned} &\text{I.} \quad \begin{cases} p_\nu\Phi_\mu - p_\mu\Phi_\nu + ic\mu_0\Phi_{\mu\nu} = 0, \\ p_\nu\Phi^{\mu\nu} + ic\mu_0\Phi^\mu = 0, \end{cases} \\ &\text{II.} \quad \begin{cases} p_\sigma\Phi_{[\mu\nu\rho]} + p_\mu\Phi_{[\nu\rho\sigma]} + p_\nu\Phi_{[\rho\sigma\mu]} \\ \qquad + p_\rho\Phi_{[\sigma\mu\nu]} + ic\mu_0\Phi_{[\mu\nu\sigma]} = 0, \\ p_\sigma\Phi^{[\mu\nu\rho\sigma]} + ic\mu_0\Phi^{[\mu\nu\rho]} = 0, \end{cases} \\ &\text{III.} \quad \mu_0 c\Phi_0 = 0. \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

De même définissant Φ'^A par $\Phi'^A = (R\gamma^A)_{i_2 i_1}\Phi'_{i_1 i_2}$ les équations (18) nous donnent les systèmes équivalents

$$\left.\begin{aligned} &\text{IV.} \quad \begin{cases} p_\nu\Phi'^{[\nu\rho\sigma]} + ic\mu_0\Phi'^{\rho\sigma} = 0, \\ p_\mu\Phi'_{\nu\rho} + p_\nu\Phi'_{\rho\mu} + p_\rho\Phi'_{\mu\nu} + ic\mu_0\Phi'_{[\mu\nu\rho]} = 0, \end{cases} \\ &\text{V.} \quad \begin{cases} p_\mu\Phi'_0 + ic\mu_0\Phi'_\mu = 0, \\ p_\mu\Phi'^\mu + ic\mu_0\Phi'^0 = 0, \end{cases} \\ &\text{VI.} \quad \mu_0 c\Phi'_{[\mu\nu\rho\sigma]} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

La théorie de M. L. de Broglie a été édifiée dans le but de construire un formalisme adapté aux caractères intrinsèques du photon, à cette époque

(en 1934), le seul corpuscule élémentaire de spin $\hbar$, et pour cela il a considéré que μ_0 devait être infiniment petit. Mais cette théorie permet également de représenter tout corpuscule de spin $\hbar$, de masse μ_0 non nécessairement petite et dans ce cas la théorie de M. L. de Broglie est strictement identique à celle que M. Kemmer (5) a édifiée plus tard comme théorie du méson. Les équations (I) et (II) représentent alors les mésons dits vectoriel et pseudoscalaire, les équations (IV) et (V) les mésons dits pseudo-vectoriel et scalaire.

Mais alors que la théorie développée par M. N. Kemmer et à sa suite de nombreux auteurs, s'appuyant sur l'autorité de M. W. Pauli considérait isolément les systèmes I, II, IV et V en n'attribuant de sens physique qu'à des systèmes irréductibles, M. L. de Broglie admet que les représentations I et II ou IV et V doivent toujours être considérées simultanément, ce qui l'a conduit à penser qu'à côté du photon « maxwellien » représenté par le système I, l'on doit également introduire un photon « non maxwellien » représenté par le système II. Le point de vue de M. L. de Broglie a été adopté plus tard, tout au moins implicitement par de nombreux auteurs dans la théorie des forces nucléaires. Par exemple MM. Møller et Rosenfeld ont discuté la possibilité de rassembler les représentations I et II (ou IV et V) en une seule représentation en introduisant une cinquième dimension spatiale, la séparation apparente de ces systèmes résultant d'une condition cylindrique appliquée à l'espace.

Un inconvénient subsistait toutefois dans la théorie de M. L. de Broglie, la distinguant des théories mixtes des forces nucléaires dans lesquelles on considère simultanément plusieurs types de champs mésiques, le terme de masse μ_0 était le même dans les trois systèmes I, II, III et ceci introduisait en outre certaines difficultés dans l'interprétation du système III.

M. L. de Broglie considère que les grandeurs de type électromagnétique, potentiels et champs, correspondent à des transitions entre un état de mouvement du photon et un état particulier ou état d'annihilation dans lequel le photon est représenté par la fonction d'onde invariante et constante $\Phi_0 = 1$. Or si $\mu_0 \neq 0$, cette fonction n'est pas solution des équations d'ondes (22).

M. J. Van Isacker ([7]) a proposé de lever ces difficultés par une légère modification de la théorie de M. L. de Broglie en considérant pour équation d'ondes du photon, au lieu de (7) l'équation

$$\left\{ p_\mu \Gamma^\mu + ic[g_0 C_0 + g_1 C_1 + g_2 C_2] \right\} \psi = 0. \qquad (24)$$

Le choix des constantes g_0, g_1, g_2 permet l'introduction de masses propres différentes dans les représentations I, II, III.

Avec la représentation (6) des Γ^μ et les expressions (14) des C, l'hypothèse de M. Van Isacker revient à remplacer (3) par l'équation

$$\Big\{ p_\mu \frac{1}{2}[\gamma^\mu_{(1)} + \gamma^\mu_{(2)}] + ic\Big[g_0 \gamma^0_{(1)} \gamma^0_{(2)} + g_1 [\gamma^{(1)}_\mu \gamma^\mu_{(2)} - \gamma^{(1)}_{[\mu\nu]} \gamma^{[\mu\nu]}_{(2)}] + g_2 [\gamma_{[\mu\nu\rho]} \gamma^{[\mu\nu\rho]} - \gamma_{[\mu\nu\rho\sigma]} \gamma^{[\mu\nu\rho\sigma]}]\Big]\Big\} \psi = 0. \qquad (25)$$

A cette équation correspondent les systèmes irréductibles

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I}'. & \left\{\begin{array}{l} p_\nu \Phi_\mu - p_\mu \Phi_\nu + icm_1 \Phi_{\mu\nu} = 0, \\ p_\nu \Phi^{\mu\nu} + icm_1 \Phi^\mu = 0, \end{array}\right. \\ \text{II}'. & \left\{\begin{array}{l} p_\sigma \Phi^{[\mu\nu\rho\sigma]} + icm_2 \Phi^{[\mu\nu\rho]} = 0, \\ p_{(\mu} \Phi_{[\nu\rho\sigma])} + icm_2 \Phi_{[\mu\nu\rho\sigma]} = 0, \end{array}\right. \\ \text{III}'. & m_3 \Phi^0 = 0. \end{array}\right\} \qquad (26)$$

Avec

$$\left.\begin{array}{l} m_1 = g_0 + 2g_1 - g_2, \\ m_2 = g_0 - 2g_1 + 3g_2, \\ m_3 = g_0 - 10g_1 - 5g_2. \end{array}\right\} \qquad (27)$$

Par suite I′ et II′ représentent des mésons vectoriel et pseudoscalaire de masses m_1 et m_2 écrits simultanément dans le système réductible (24). De plus, disposant des paramètres g_0, g_1, g_2, nous pouvons adapter ceux-ci de façon à avoir $m_3 = 0$, ce qui nous permet de lever les difficultés relatives à la solution d'annihilation qui peut maintenant être introduite comme une véritable solution.

De plus, il nous est maintenant possible de concevoir un photon maxwellien de masse sensiblement nulle réalisé par la fusion de deux corpuscules de masses propres non nulles.

Généralisant la méthode de M. Van Isacker, nous pouvons également considérer une liaison entre deux corpuscules de Dirac s'exerçant par un couplage étroit entre les 16 grandeurs caractéristiques du corpuscule.

Nous avons ainsi à considérer l'équation

$$\left[p_\mu \frac{1}{2}(\gamma^\mu_{(1)} + \gamma^\mu_{(2)}) + icM \right] \psi = 0. \qquad (28)$$

avec

$$M = g_0 \gamma^{(1)}_0 \gamma^0_{(2)} + g_1 \gamma^{(1)}_\mu \gamma^\mu_{(2)} + f_1 \gamma^{(1)}_{[\mu\nu]} \gamma^{[\mu\nu]}_{(2)} + g_2 \gamma^{[\mu\nu\rho]}_{(1)} \gamma^{(2)}_{[\mu\nu\rho]} + f_2 \gamma_{[\mu\nu\rho\sigma]} \gamma^{[\mu\nu\rho\sigma]}. \qquad (29)$$

Passant en grandeurs tensorielles, ceci nous donne

([5]) N. Kemmer, *Proc. Roy. Soc.*, 1939, A **173**, p. 91.
On remarquera l'identité du formalisme introduit par M. Kemmer dans ce dernier article et celui que nous avions introduit dans notre Thèse en 1936.

([6]) C. Møller et L. Rosenfeld, *Danske Vid. Selsk. Mat. Fys. Medd.*, 1940, **17**, n° 8.

([7]) J. Van Isacker, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, 1947, **224**, p. 1758-1760.
Sur une extension de la méthode de M. J. Van Isacker *voir* G. Petiau, *J. de Physique*, 1948, 8e série, **9**, p. 245-248.

les systèmes

$$\left.\begin{array}{ll}\text{I}''. & \left\{\begin{array}{l} p_\nu \Phi_\mu - p_\mu \Phi_\nu + ic\chi_3 \Phi_{\mu\nu} = 0, \\ p_\nu \Phi^{\mu\nu} + ic\chi_2 \Phi^\mu = 0, \end{array}\right. \\ \text{II}''. & \left\{\begin{array}{l} p_\sigma \Phi^{[\mu\nu\rho\sigma]} + ic\chi_4 \Phi^{[\mu\nu\rho]} = 0, \\ p_{(\mu} \Phi_{[\nu\rho\sigma])} + ic\chi_5 \Phi_{[\mu\nu\rho\sigma]} = 0, \end{array}\right. \\ \text{III}''. & \chi_1 \Phi_0 = 0 \end{array}\right\} \quad (30)$$

avec

$$\left.\begin{array}{l} \chi_1 = g_0 - 4g_1 + 6f_1 - 4g_2 + f_2, \\ \chi_5 = g_0 + 4g_1 + 6f_1 + 4g_2 + f_2, \\ \chi_4 = g_0 - 2g_1 + 2g_2 - f_2, \\ \chi_2 = g_0 + 2g_1 - 2g_2 - f_2, \\ \chi_3 = g_0 - 2f_1 + f_2, \end{array}\right\} \quad (31)$$

χ_1, χ_2, χ_3, χ_4, χ_5 étant $\neq 0$, les systèmes I″ et II″ nous donnent immédiatement

$$\left.\begin{array}{l} \left[\square - \frac{c^2}{\hbar^2}\chi_2\chi_3\right]\Phi_\mu = 0, \\ \left[\square - \frac{c^2\chi_2\chi_3}{\hbar^2}\right]\Phi_{[\mu\nu]} = 0, \\ \left[\square - \frac{c^2}{\hbar^2}\chi_4\chi_5\right]\Phi_{[\mu\nu\rho\sigma]} = 0, \\ \left[\square - \frac{c^2}{\hbar^2}\chi_4\chi_5\right]\Phi_{[\mu\nu\rho]} = 0 \end{array}\right\} \quad (32)$$

et ceci nous conduit à considérer les masses propres des photons maxwellien et non maxwellien ϖ_1 et ϖ_2 définies par

$$\varpi_1^2 = \chi_2\chi_3, \qquad \varpi_2^2 = \chi_4\chi_5.$$

Par suite, nous voyons que la masse propre du corpuscule résultant de la fusion de deux corpuscules de Dirac est susceptible d'un large arbitraire lié au choix des constantes de couplage g_0, g_1, f_1, g_2, f_2.

2. Nous allons maintenant examiner et discuter en détail une nouvelle extension de la méthode de fusion de M. L. de Broglie en généralisant celle-ci au cas où les deux corpuscules de Dirac constituants possédaient des masses propres différentes.

Considérons donc les deux équations d'ondes correspondant à des corpuscules de masses propres M_1 et M_2

$$[p_\mu \gamma^\mu_{(1)} + icM_1]\psi_{i_1} = 0, \qquad [p_\mu \gamma^\mu_{(2)} + icM_2]\psi_{i_2} = 0, \quad (33)$$

l'extension du formalisme de la fusion nous conduirait à adopter pour équation d'ondes du système

$$\left[p_\mu\left(\frac{1}{M_1}\gamma^\mu_{(1)} + \frac{1}{M_2}\gamma^\mu_{(2)}\right) + 2ic\gamma^0_{(1)}\gamma^0_{(2)}\right]\psi_{i_1 i_2} = 0, \quad (34)$$

ou encore en introduisant les *deux* masses réduites

$$\frac{1}{\mu_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}\right), \qquad \frac{1}{\mu_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{M_1} - \frac{1}{M_2}\right),$$

$$\left\{p_\mu\left[\frac{1}{\mu_1}\left[\frac{1}{2}(\gamma^\mu_{(1)} + \gamma^\mu_{(2)})\right] + \frac{1}{\mu_2}\left[\frac{1}{2}(\gamma^\mu_{(1)} - \gamma^\mu_{(2)})\right]\right] + 2ic\gamma^0_{(1)}\gamma^0_{(2)}\right\}\psi_{i_1 i_2} = 0, \quad (35)$$

ce qui s'écrit encore

$$\left[\frac{1}{\mu_1}S + \frac{1}{\mu_2}S' + 2ic\gamma^0_{(1)}\gamma^0_{(2)}\right]\psi_{i_1 i_2} = 0. \quad (36)$$

Remarquons que si l'on pose encore

$$\psi_{i_1 i_2} = (\gamma_{[\mu\nu\rho\sigma]})_{i_2 m_2}\psi'_{i_1 m_2}, \quad (37)$$

les fonctions ψ' seront solutions de

$$\left[\frac{1}{\mu_1}S' + \frac{1}{\mu_2}S + 2ic\right]\psi' = 0. \quad (38)$$

Le passage de ψ à ψ' a permuté les rôles des masses réduites μ_1 et μ_2.

A partir de (36) utilisant les relations (9) on montre facilement que les fonctions ψ satisfont aux équations aux dérivées partielles du quatrième ordre

$$\left[\square - \frac{c^2}{\hbar^2}(2\mu_1)^2\right]\left[\square - \frac{c^2}{\hbar^2}(2\mu_2)^2\right]\psi = 0. \quad (39)$$

Cette équation nous montre notamment que les solutions de (36) peuvent se répartir en deux classes correspondant à des « états de masse propre » $2\mu_1$, $2\mu_2$ différents.

Si nous passons des fonctions d'ondes $\psi_{i_1 i_2}$ aux fonctions d'ondes tensorielles par la transformation linéaire (19), nous voyons facilement que le système (38) est équivalent au système tensoriel

$$\left.\begin{array}{r} \frac{1}{2\mu_1}[p_\nu\Phi_\mu - p_\mu\Phi_\nu] + \frac{1}{2\mu_2}p^\rho\Phi_{[\mu\nu\rho]} + ic\Phi_{[\mu\nu]} = 0, \\ \frac{1}{2\mu_1}[p^\nu\Phi_{[\mu\nu]}] + \frac{1}{2\mu_2}p_\mu\Phi_0 + ic\Phi_\mu = 0, \\ \frac{1}{2\mu_1}p^\sigma\Phi_{[\mu\nu\rho\sigma]} + \frac{1}{2\mu_2}p_{(\mu}\Phi_{[\nu\rho])} + ic\Phi_{[\mu\nu\rho]} = 0, \\ \frac{1}{2\mu_2}p_\mu\Phi^\mu + ic\Phi_0 = 0, \\ \frac{1}{2\mu_1}p_{(\sigma}\Phi_{[\mu\nu\rho])} + ic\Phi_{[\mu\nu\rho\sigma]} = 0. \end{array}\right\} \quad (40)$$

Avant de discuter les propriétés de ce système, nous allons en considérer une extension analogue à celle de M. J. Van Isacker dans le cas du photon, extension qui nous permettra de relier la théorie exposée ici à d'autres tentatives.

Nous introduirons donc dans le cas des deux corpuscules considérés en (33) la notion de couplage généralisé entre les constituants et nous remplacerons l'équation (36) par

$$\left[\frac{1}{\mu_1}S + \frac{1}{\mu_2}S' + icM\right]\psi_{i_1 i_2} = 0, \quad (41)$$

avec pour M l'opérateur (29).

Ceci nous donnera au lieu du système tensoriel (40),

le système

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{\mu_2}p_\mu\Phi^\mu + ic\chi_1\Phi_0 = 0,\\
&\frac{1}{\mu_1}p^\nu\Phi_{\mu\nu} + \frac{1}{\mu_2}p_\mu\Phi_0 + ic\chi_2\Phi_\mu = 0,\\
&\frac{1}{\mu_1}[p_\nu\Phi_\mu - p_\mu\Phi_\nu] + \frac{1}{\mu_2}p^\rho\Phi_{[\mu\nu\rho]} + ic\chi_3\Phi_{\mu\nu} = 0,\\
&\frac{1}{\mu_1}p^\sigma\Phi_{[\mu\nu\rho\sigma]} + \frac{1}{\mu_2}p_{(\mu}\Phi_{(\nu\rho])} + ic\chi_4\Phi_{[\mu\nu\rho]} = 0,\\
&\frac{1}{\mu_1}p_{(\sigma}\Phi_{[\mu\nu\rho])} + ic\chi_5\Phi_{[\mu\nu\rho\sigma]} = 0
\end{aligned}\right\} \quad (42)$$

avec les définitions (31) des χ en fonctions des g et f.

A partir de ce système on voit facilement que les Φ^A satisfont aux équations des second, quatrième et huitième ordre

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\square - \frac{c^2}{\hbar^2}\mu_2^2\chi_1\chi_2\right]\Phi_0 = 0,\\
&\left[\square - \frac{c^2}{\hbar^2}\mu_2^2\chi_1\chi_2\right]\left[\square - c^2\frac{\mu_1^2}{\hbar^2}\chi_2\chi_3\right]\Phi_\mu = 0,\\
&\left[\square - \frac{c^2}{\hbar^2}\mu_2^2\chi_1\chi_2\right]\left[\square - c^2\frac{\mu_1^2}{\hbar^2}\chi_2\chi_3\right]\\
&\times\left[\square - c^2\frac{\mu_2^2}{\hbar^2}\chi_3\chi_4\right]\left[\square - \frac{c^2\mu_1^2}{\hbar^2}\chi_4\chi_5\right]\Phi_{\mu\nu} = 0,\\
&\left[\square - \frac{c^2}{\hbar^2}\mu_2^2\chi_3\chi_4\right]\left[\square - \frac{c^2}{\hbar^2}\mu_1^2\chi_4\chi_5\right]\Phi_{[\mu\nu\rho]} = 0,\\
&\left[\square - \frac{c^2}{\hbar^2}\mu_1^2\chi_4\chi_5\right]\Phi_{[\mu\nu\rho\sigma]} = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (43)$$

Ceci nous conduit à la considération de quatre états de masses propres ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3, ϖ_4 tels que

$$\left.\begin{aligned}
\varpi_1^2 &= \mu_2^2\chi_1\chi_2, & \varpi_2^2 &= \mu_1^2\chi_2\chi_3,\\
\varpi_3^2 &= \mu_2^2\chi_3\chi_4, & \varpi_4^2 &= \mu_1^2\chi_4\chi_5.
\end{aligned}\right\} \quad (44)$$

Si nous posons encore

$$\left.\begin{aligned}
\Phi_\mu &= c\frac{\mu_1}{\hbar}\chi_3\Phi'_\mu, & \Phi_{[\mu\nu\rho]} &= \frac{c}{\hbar}\chi_3\mu_2\Phi'_{[\mu\nu\rho]},\\
\Phi_0 &= \frac{\mu_1}{\mu_2}\Phi'_0, & \Phi_{[\mu\nu\rho\sigma]} &= \frac{\mu_2}{\mu_1}\Phi'_{[\mu\nu\rho\sigma]},
\end{aligned}\right\} \quad (45)$$

le système (42) s'écrira

$$\left.\begin{aligned}
&\partial_\mu\Phi'_\nu - \partial_\nu\Phi'_\mu - \partial^\rho\Phi'_{[\mu\nu\rho]} = \Phi_{[\mu\nu]},\\
&\partial_\mu\Phi'^\mu + \frac{\varpi_1^2}{\varpi_2^2}\Phi'_0 = 0,\\
&\partial^\nu\Phi_{\mu\nu} + \partial_\mu\Phi'_0 = \frac{c^2}{\hbar^2}\varpi_2^2\Phi'_\mu,\\
&\partial^\sigma\Phi'_{[\mu\nu\rho\sigma]} + \partial_{(\mu}\Phi_{(\nu\rho])} = \frac{c^2}{\hbar^2}\varpi_3^2\Phi'_{[\mu\nu\rho]},\\
&\partial_{(\sigma}\Phi'_{[\mu\nu\rho])} + \frac{\varpi_4^2}{\varpi_3^2}\Phi'_{[\mu\nu\rho\sigma]} = 0,
\end{aligned}\right\} \quad (46)$$

Le système (46) a déjà été rencontré par M. Potier ([8]) en cherchant à établir à partir de considérations de variance spinorielle les équations d'ondes les plus générales correspondant à un corpuscule de spin $\hbar$.

Nous voyons ici que ces équations s'introduisent et s'interprètent facilement par le concept de fusion généralisée entre deux corpuscules de Dirac de masses propres différentes.

Dans le cas particulier où $\varpi_1 = \varpi_2 = \varpi_3 = \varpi_4$, le système (46) se ramène aux équations étudiées par M. Whittaker ([9]) en liaison avec la théorie de l'électron de Dirac ou introduites par M. Eriksson ([10]), c'est-à-dire au système de quatre équations de Dirac

$$[p_\mu(\gamma^\mu)_{i_1m_1} + icm_0(\gamma^0)_{i_1m_1}]\psi_{m_1i_2} = 0 \quad (47)$$

avec un seul terme de masse.

On sait que cette équation ne permet d'obtenir une équation d'ondes acceptable pour le photon (avec m_0 infiniment petit) que si l'on ajoute une condition supplémentaire relative aux $\psi_{i_1i_2}$, soit

$$\psi_{i_1i_2} = \psi_{i_2i_1},$$

tandis que la condition $\psi_{i_1i_2} = -\psi_{i_2i_1}$ rendrait l'équation (47) équivalente au système (22 II) du photon non maxwellien (ou du méson pseudo-scalaire).

Les définitions (44) des masses propres ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3, ϖ_4 nous montrent d'abord que l'on peut éliminer les masses réduites μ_1, μ_2 de notre formalisme à condition de remplacer les χ par des χ' tels que

$$\left.\begin{aligned}
\mu_2^2\chi_1\chi_2 &= \chi'_1\chi'_2, & \mu_1^2\chi_2\chi_3 &= \chi'_2\chi'_3,\\
\mu_2^2\chi_3\chi_4 &= \chi'_3\chi'_4, & \mu_1^2\chi_4\chi_5 &= \chi'_4\chi'_5,
\end{aligned}\right\} \quad (48)$$

d'où

$$\left.\begin{aligned}
&\chi'_1 = \frac{\mu_2^2}{\mu_1^2}\chi_1, \quad \chi'_2 = \mu_1^2\chi_2, \quad \chi_3 = \chi'_3,\\
&\chi'_4 = \mu_2^2\chi_4, \quad \chi'_5 = \frac{\mu_1^2}{\mu_2^2}\chi_5.
\end{aligned}\right\} \quad (49)$$

Or les χ sont définis au moyen des g et f par les relations (31) et réciproquement l'on a

$$\left.\begin{aligned}
16g_0 &= \chi_1 + 4\chi_2 + 6\chi_3 + 4\chi_4 + \chi_5,\\
16g_1 &= -\chi_1 + 2\chi_2 - 2\chi_4 + \chi_5,\\
16f_1 &= \chi_1 - 2\chi_3 + \chi_5,\\
16g_2 &= -\chi_1 - 2\chi_2 + 2\chi_4 + \chi_5,\\
16f_2 &= \chi_1 - 4\chi_2 + 6\chi_3 - 4\chi_4 + \chi_5.
\end{aligned}\right\} \quad (50)$$

Remplacer les χ par des χ' revient donc à remplacer les g et f par des g' et f' et, par suite, M par un nouveau développement

$$\begin{aligned}M' = g'_0\gamma_0^{(1)}\gamma_{(2)}^0 + g'_1\gamma_\mu^{(1)}\gamma_{(2)}^\mu\\
+ f'_1\gamma_{\mu\nu}^{(1)}\gamma_{(2)}^{\mu\nu} + g'_2\gamma_{[\mu\nu\rho]}^{(1)}\gamma_{(2)}^{[\mu\nu\rho]} + f'_2\gamma_{[\mu\nu\rho\sigma]}^{(1)}\gamma_{[\mu\nu\rho\sigma]}^{(2)};\end{aligned} \quad (51)$$

avec ce développement nous pouvons remplacer les équations (41), (42) ou (46) par les équations

([8]) J. Potier, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, 1948, **226**, p. 63-64, 1690-1692.

([9]) Whittaker, *Proceed. Roy. Soc.*, 1928, A **121**.

([10]) Ericksson, *Arkiv. f. Mat. Astr. Fys.*, 1947, **34** A, n° 21. — B. Bruno, *Ibid.*, 1948, **35** A, n° 1.

de Whittaker-Eriksson généralisées

$$[p_\mu(\gamma^\mu)_{i_1m_1}\delta_{i_2m_2} + ic(M')_{i_1m_1,\,i_2m_2}]\psi_{m_1m_2} = 0. \qquad (52)$$

Cette équation correspond encore à quatre systèmes du type équation de Dirac, mais ceux-ci ne sont plus indépendants, la matrice M' couplant entre eux les systèmes de quatre fonctions ψ.

En particulier, l'équation (36) donnant le système tensoriel (40) peut se remplacer par une équation de la forme (52), avec pour M' une expression de la forme (51) avec

$$\chi'_1 = 2\frac{\mu_2^2}{\mu_1^2}, \qquad \chi'_2 = 2\mu_1^2, \qquad \chi'_3 = 2,$$
$$\chi'_4 = 2\mu_2^2, \qquad \chi'_5 = 2\frac{\mu_1^2}{\mu_2^2}$$

et

$$\left.\begin{aligned}
16g'_0 &= 2\left[\frac{\mu_1^2}{\mu_2^2} + \frac{\mu_2^2}{\mu_1^2}\right] + 8[\mu_1^2 + \mu_2^2] + 12,\\
16g'_1 &= 2\left[\frac{\mu_1^2}{\mu_2^2} - \frac{\mu_2^2}{\mu_1^2}\right] + 4[\mu_1^2 - \mu_2^2],\\
16f'_1 &= 2\left[\frac{\mu_1^2}{\mu_2^2} + \frac{\mu_2^2}{\mu_1^2}\right] - 4,\\
16g'_2 &= 2\left[\frac{\mu_1^2}{\mu_2^2} - \frac{\mu_2^2}{\mu_1^2}\right] + 4[\mu_2^2 - \mu_1^2],\\
16f'_2 &= 2\left[\frac{\mu_1^2}{\mu_2^2} + \frac{\mu_2^2}{\mu_1^2}\right] - 8[\mu_1^2 + \mu_2^2] + 12.
\end{aligned}\right\} \qquad (53)$$

D'autres cas particuliers remarquables des équations (41) ou (42) sont ceux où certaines des constantes χ sont nulles.

Nous pouvons avoir χ_1 et χ_5 nuls.

Le système (42) donne alors

$$p_\mu\Phi^\mu = 0, \qquad p_{(\sigma}\Phi_{[\mu\nu\rho])} = 0. \qquad (54)$$

Nous en déduisons immédiatement

$$\left.\begin{aligned}
&\square\Phi_0 = 0, \qquad \square\Phi_{[\mu\nu\rho\sigma]} = 0,\\
&\square\left[\square - \frac{c^2}{\hbar^2}\mu_1^2\chi_2\chi_3\right]\Phi_\mu = 0,\\
&\square\left[\square - \frac{c^2}{\hbar^2}\mu_2^2\chi_3\chi_4\right]\Phi_{[\mu\nu\rho]} = 0,\\
&\square\left[\square - \frac{c^2}{\hbar^2}\mu_2^2\chi_3\chi_4\right]\\
&\quad\times\left[\square - \frac{c^2}{\hbar^2}\mu_1^2\chi_2\chi_3\right]\Phi_{\mu\nu} = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (55)$$

Si de plus, nous avons

$$\mu_1^2\chi_2\chi_3 = \mu_2^2\chi_3\chi_4 \qquad (56)$$

$\left(\text{d'où } \chi_2 = \mu_2^2,\ \chi_3 = \frac{1}{\mu_1\mu_2},\ \chi_4 = \mu_1^2\right)$, nous aurons plus simplement encore

$$\left.\begin{aligned}
&\square\Phi^0 = 0, \qquad \square\Phi_{[\mu\nu\rho\sigma]} = 0,\\
&\square\left[\square - \frac{c^2}{\hbar^2}\mu_1\mu_2\right]\Phi_\mu = 0,\\
&\square\left[\square - \frac{c^2}{\hbar^2}\mu_1\mu_2\right]\Phi_{[\mu\nu]} = 0,\\
&\square\left[\square - \frac{c^2}{\hbar^2}\mu_1\mu_2\right]\Phi_{[\mu\nu\rho]} = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (57)$$

Le corpuscule représenté par les équations d'ondes (41) ou (42) possède alors, à côté d'un état de masse propre nulle, un état de masse propre $\sqrt{\mu_1\mu_2}$.

La théorie développée ici correspondant à ce cas devient alors identique à la théorie de l'électrodynamique généralisée de M. Podolsky [11] complétée par un champ pseudo-scalaire.

Les équations (42) se réduisent ici à

$$\left.\begin{aligned}
&\partial_\nu\Phi_\mu - \partial_\mu\Phi_\nu + \partial^\sigma\Phi_{[\mu\nu\rho]} + \frac{c}{\hbar}\Phi_{\mu\nu} = 0,\\
&\partial^\nu\Phi_{[\mu\nu]} + \partial_\mu\Phi_0 + \frac{c^2}{\hbar^2}\mu_1\mu_2\Phi_\mu = 0,\\
&\partial^\sigma\Phi_{[\mu\nu\rho\sigma]} + \partial_{(\mu}\Phi_{[\nu\rho])} + \frac{c^2}{\hbar^2}\mu_1\mu_2\Phi_{[\mu\nu\rho]} = 0,\\
&\partial_\mu\Phi^\mu = 0, \qquad \partial_{(\sigma}\Phi_{[\mu\nu\rho])} = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (58)$$

et peuvent se déduire de l'équation de Whittaker-Ericksson généralisée

$$\Big\{p_\mu\gamma^\mu_{(1)} + ic\Big[\frac{\mu_1\mu_2}{2}\big[\gamma_0^{(1)}\gamma^0_{(2)} - \gamma^{(1)}_{[\mu\nu\rho\sigma]}\gamma^{[\mu\nu\rho\sigma]}_{(2)}\big] + \frac{1}{8}\big[3\gamma_0^{(1)}\gamma^0_{(2)} + 3\gamma^{(1)}_{[\mu\nu\rho\sigma]}\gamma^{[\mu\nu\rho\sigma]}_{(2)} - \gamma^{(1)}_{[\mu\nu]}\gamma^{[\mu\nu]}_{(2)}\big]\Big]\Big\}\psi_{i_1i_2} = 0. \qquad (59)$$

Un autre cas remarquable est celui où nous prenons cette fois χ_2 et χ_4 nuls.

Les équations (42) se réduisent à

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{\mu_1}[p_\nu\Phi_\mu - p_\mu\Phi_\nu] + \frac{1}{\mu_2}p^\rho\Phi_{[\mu\nu\rho]} + ic\chi_3\Phi_{[\mu\nu]} = 0,\\
&\frac{1}{\mu_2}p_\mu\Phi^\mu + ic\chi_1\Phi_0 = 0,\\
&\frac{1}{\mu_1}p_\sigma\Phi_{[\mu\nu\rho]} + ic\chi_5\Phi_{[\mu\nu\rho\sigma]} = 0,\\
&\frac{1}{\mu_1}p^\nu\Phi_{[\mu\nu]} + \frac{1}{\mu_2}p_\mu\Phi_0 = 0,\\
&\frac{1}{\mu_1}p^\sigma\Phi_{[\mu\nu\rho\sigma]} + \frac{1}{\mu_2}p_{(\mu}\Phi_{[\nu\rho])} = 0,
\end{aligned}\right\} \qquad (60)$$

d'où nous tirons facilement

$$\left.\begin{aligned}
&\square\Phi_0 = 0, \qquad \square\Phi_{[\mu\nu\rho\sigma]} = 0, \qquad \square\Phi_{\mu\nu} = 0,\\
&\square\square\Phi_\mu = 0, \qquad \square\square\Phi_{[\mu\nu\rho]} = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (61)$$

Malgré l'existence des termes de couplage dans l'opérateur M, le corpuscule se comporte comme ne possédant que des états de masse propre nulle.

Plus précisément, ce système qui se ramène

([11]) Podolsky et P. Schweed, *Rev. Modern Phys.*, janvier 1948. — Podolsky, *Phys. Rev.*, 1942, **62**, p. 68. — Podolsky et Kikuchi, *Phys. Rev.*, 1944, **65**, p. 228; 1945, **67**, p. 184. — A. E. S. Green, *Phys. Rev.*, 1948, **73**, p. 26.

La théorie développée par Raisky, *Phys. Rev.*, octobre 1946, **70**, p. 1-15; p. 573-574, correspondrait aux équations (38) (40), ou (52) avec le terme de masse déterminé par les coefficients (53).

facilement à la forme

$$\left.\begin{aligned} p_\nu\Phi'_\mu - p_\mu\Phi'_\nu + p^\rho\Phi'_{\mu\nu\rho} + ic\chi'_3\Phi_{\mu\nu} &= 0, \\ p^\nu\Phi_{\mu\nu} + p_\mu\Phi'_0 &= 0, \\ p_{(\mu}\Phi_{[\nu\rho])} + p^\sigma\Phi'_{[\mu\nu\rho\sigma]} &= 0, \\ p_\mu\Phi'^\mu + ic\chi'_1\Phi'_0 &= 0, \\ p_{(\sigma}\Phi'_{[\mu\nu\rho])} + ic\chi'_5\Phi_{[\mu\nu\rho\sigma]} &= 0, \end{aligned}\right\} \quad (62)$$

nous donne par combinaisons

$$\left.\begin{aligned} &\Box\Phi_0 = 0, \qquad \Box\Phi_{[\mu\nu\rho\sigma]} = 0, \\ &\Box\Phi'_\mu + \frac{c}{\hbar}[\chi'_1 - \chi'_3]\partial_\mu\Phi'_0 = 0, \\ &\Box\Phi'_{[\mu\nu\rho]} + \frac{c}{\hbar}[\chi'_5 - \chi'_3]\partial^\sigma\Phi_{[\mu\nu\rho\sigma]} = 0, \end{aligned}\right\} \quad (63)$$

et, par suite,

$$\Box\Phi_{\mu\nu} = 0.$$

On peut dire que dans cette théorie, si du point de vue des champs le corpuscule possède une masse nulle, il n'en est pas strictement de même du point de vue des potentiels.

Les conditions $\chi_2 = \chi_4 = 0$ résultent des conditions sur les g et f

$$g_0 = f_2, \qquad g_1 = g_2, \quad (64)$$

et, par suite, les équations ci-dessus correspondent à un terme M' de la forme

$$\begin{aligned} M' = \; & g'_0\left[\gamma^0_{(1)}\gamma^0_{(2)} + \gamma^{(1)}_{[\mu\nu\rho\sigma]}\gamma^{[\mu\nu\rho\sigma]}_{(2)}\right] \\ & + g'_1\left[\gamma^{(1)}_\mu\gamma^\mu_{(2)} + \gamma^{(1)}_{[\mu\nu\rho]}\gamma^{[\mu\nu\rho]}_{(2)}\right] + f'_1\gamma^{(1)}_{[\mu\nu]}\gamma^{[\mu\nu]}_{(2)} \end{aligned} \quad (65)$$

dans l'équation

$$\left[p_\mu\gamma^{(\mu)}_{(1)} + icM'\right]\psi_{i_1 i_2} = 0. \quad (66)$$

3. Nous allons maintenant examiner la possibilité d'introduire dans notre théorie la simplification importante qu'ont apporté M. Møller et Rosenfeld ([12]) dans la théorie du méson en unissant les équations d'ondes des mésons vectoriel et pseudoscalaire en un seul système d'équations établies dans un espace à cinq dimensions, la séparation réalisée dans l'espace à quatre dimensions résultant d'une condition cylindrique auxiliaire.

Introduisant les coordonnées $x^1, x^2, x^3, x^4, x^5, (x^\alpha)$, posant $\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$, on sait que ces équations s'écrivent

$$\left.\begin{aligned} \partial_\alpha\Phi_\beta - \partial_\beta\Phi_\alpha &= \Phi_{\alpha\beta}, \\ \partial_\beta\Phi^{\alpha\beta} + \frac{c^2}{\hbar^2}\mu_0^2\Phi^\alpha &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (67)$$

On sait que ce résultat peut être obtenu également dans la théorie du photon moyennant une légère modification du formalisme.

En effet, alors que dans l'espace euclidien R_4, il n'y a qu'une représentation irréductible d'un système de quatre matrices liées par

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\delta^{\mu\nu},$$

dans l'espace euclidien R_5, il existe deux telles représentations irréductibles caractérisées par les relations $\gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$ ou par $\gamma_5 = -\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$.

Ce n'est qu'en prenant $\gamma_5^{(1)} = +(\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4)^{(1)}$ et $\gamma_5^{(2)} = -(\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4)^{(2)}$ que la fusion des deux équations d'ondes

$$[p_\alpha\gamma^\alpha_{(1)} + iM_1c]\psi = 0, \qquad [p_\alpha\gamma^\alpha_{(2)} + iM_2c]\psi = 0 \quad (68)$$

nous permet d'obtenir une extension de notre théorie analogue à celle de Møller et Rosenfeld.

Le cas $M_1 = M_2$ correspondant au photon de M. L. de Broglie, nous donne avec la modification de M. J. Van Isacker, l'équation

$$\Big\{p_\alpha\frac{1}{2}\left[\gamma^\alpha_{(1)} + \gamma^{(2)}_\alpha\right] + ic\left[g_0\gamma^{(1)}_0\gamma^{(2)}_0 + g_1\gamma^\alpha_{(1)}\gamma^{(2)}_\alpha + f_1\gamma^{(1)}_{\alpha\beta}\gamma^{\alpha\beta}_{(2)}\right]\Big\}\psi = 0. \quad (69)$$

Le terme de masse n'introduit ici que trois constantes au plus. Ce terme contient les $\gamma^{(1)}$, $\gamma^{(2)}$ écrits chacun dans sa représentation irréductible. Si les $\gamma^{(2)}$ étaient écrits dans la même représentation que les $\gamma^{(1)}$, il nous donnerait, séparant les indices 5,

$$(\gamma^5 = \gamma^{[\mu\nu\rho\sigma]}, \quad \gamma^{\mu 5} = \gamma^{\nu\rho\sigma}),$$

$$\begin{aligned} M = g_0\gamma^0_{(1)}\gamma^{(2)}_0 &+ g_1\left[\gamma^\mu_{(1)}\gamma'^{(2)}_\mu - \gamma^{(1)}_{[\mu\nu\rho\sigma]}\gamma'^{[\mu\nu\rho\sigma]}_{(2)}\right] \\ &+ f_1\left[\gamma^{\mu\nu}_{(1)}\gamma'^{(2)}_{\mu\nu} - \gamma^{(1)}_{[\mu\nu\rho]}\gamma'^{[\mu\nu\rho]}_{(2)}\right] \end{aligned} \quad (70)$$

et, par suite, l'unification de Møller introduit entre les cinq constantes g_0, g_1, f_1, g_2, f_2 définies précédemment les relations $g_2 = -f_1$, $f_2 = -g_1$.

Aux équations (69) ci-dessus correspond le système

$$\left.\begin{aligned} p_\beta\Phi_\alpha - p_\alpha\Phi_\beta + ic[g_0 - g_1 - 2f_1]\Phi_{\alpha\beta} &= 0, \\ p_\beta\Phi^{\alpha\beta} + ic[g_0 + 3g_1 + 2f_1]\Phi^\alpha &= 0, \\ [g_0 - 5g_1 - 10f_1]\Phi_0 &= 0, \end{aligned}\right\} \quad (71)$$

Ceci nous conduit à attribuer au corpuscule représenté par cette équation la masse propre μ_0 telle que

$$\mu_0^2 = [g_0 - g_1 - 2f_1][g_0 + 3g_1 + 2f_1] \quad (72)$$

qui, dans le cas de l'opérateur de masse de M. J. Van Isacker ($f_1 = -g_1$), se réduit à

$$\mu_0^2 = (g_0 + g_1)^2.$$

La dernière équation relative à l'état d'annihilation peut alors s'écarter par la condition auxiliaire

$$g_0 + 5g_1 = 0.$$

Dans le cas de deux masses M_1 et M_2 différentes nous pouvons généraliser de la même façon les

([12]) C. Møller et L. Rosenfeld, *Danske Vid. Selsk. Mat. Fys. Medd.*, 1940, **17**, n° 8.
Sur l'extension de ce procédé, *voir* également G. Petiau, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, 30 juin 1941, **212**, p. 1126-1128; *Disquisitiones Math. Phys.*, 1937, VI, n° **1-4**, p. 235-241; *Cahiers de Physique*, octobre 1948, n° **33**.

équations (35) que nous remplaçons par

$$\left[\frac{1}{\mu_1}p_\alpha[\gamma^\alpha_{(1)}+\gamma^\alpha_{(2)}] + \frac{1}{\mu_2}p_\alpha[\gamma^\alpha_{(1)}-\gamma^{(\alpha)}_{(2)}] + icM\right]\psi = 0, \tag{73}$$

avec

$$M = g_0\gamma^{(1)}_0\gamma^0_{(2)} + g_1\gamma^{(1)}_\alpha\gamma^\alpha_{(2)} + f_1\gamma^{(1)}_{\alpha\beta}\gamma^{\alpha\beta}_{(2)}. \tag{74}$$

Nous en déduisons le système tensoriel

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{\mu_2}p_\alpha\Phi^\alpha + ic\chi'_1\Phi_0 = 0,\\
&\frac{1}{\mu_1}p^\beta\Phi_{\alpha\beta} + \frac{1}{\mu_2}p_\alpha\Phi_0 + ic\chi'_2\Phi_\alpha = 0,\\
&\frac{1}{\mu_1}[p_\beta\Phi_\alpha - p_\alpha\Phi_\beta]\\
&\quad + \frac{1}{\mu_2}\frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon}(p^\gamma\Phi^{[\delta\varepsilon]}) + ic\chi'_3\Phi_{\alpha\beta} = 0
\end{aligned}\right\} \tag{75}$$

avec

$$\chi'_1 = g_0 - 5g_1 - 10f_1,$$
$$\chi'_2 = g_0 + 3g_1 + 2f_1,$$
$$\chi'_3 = g_0 - g_1 - 2f_1,$$
$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon} = 1 \quad \text{ou} \quad 0.$$

Nous en déduisons facilement les équations des second, quatrième et sixième ordres

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\square - \frac{c^2}{\hbar^2}\mu_2^2\chi'_1\chi'_2\right]\Phi_0 = 0,\\
&\left[\square - \frac{c^2}{\hbar^2}\mu_2^2\chi'_1\chi'_2\right]\left[\square - \frac{c^2\mu_1^2}{\hbar^2}\chi'_2\chi'_3\right]\Phi_\alpha = 0,\\
&\left[\square - \frac{c^2}{\hbar^2}\mu_2^2\chi'_1\chi'_2\right]\\
&\quad\times\left[\square - \frac{c^2}{\hbar^2}\mu_1^2\chi'_2\chi'_3\right]\left[\square - \frac{c^2}{\hbar^2}\mu_2^2\chi'^2_3\right]\Phi_{\alpha\beta} = 0
\end{aligned}\right\} \tag{76}$$

et, par suite, nous sommes amenés à considérer que le corpuscule représenté est susceptible de trois états de masse propre ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3 tels que

$$\varpi_1^2 = \mu_2^2\chi'_1\chi'_2, \qquad \varpi_2^2 = \mu_1^2\chi'_2\chi'_3, \qquad \varpi_3^2 = \mu_2^2\chi'^2_3. \tag{77}$$

Remarquons qu'il suffit ici de poser $\chi'_2 = 0$ pour que deux de ces masses s'annulent.

Il nous reste alors

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{\mu_2}p_\alpha\Phi^\alpha + ic\chi'_1\Phi_0 = 0,\\
&\frac{1}{\mu_1}p^\beta\Phi_{\alpha\beta} + \frac{1}{\mu_2}p_\alpha\Phi_0 = 0,\\
&\frac{1}{\mu_1}[p_\beta\Phi_\alpha - p_\alpha\Phi_\beta]\\
&\quad + \frac{1}{\mu_2}\frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon}p^\gamma\Phi^{\delta\varepsilon} + ic\chi'_3\Phi_{\alpha\beta} = 0,
\end{aligned}\right\} \tag{78}$$

d'où nous tirons immédiatement

$$\left.\begin{aligned}
&\square\Phi_0 = 0,\\
&\square\Phi_\alpha + \frac{c}{\hbar}\left[\frac{\mu_2^2\chi'_1 - \mu_1^2\chi'_3}{\mu_2}\right]\partial_\alpha\Phi_0 = 0,\\
&\square\left[\square - \frac{c^2}{\hbar^2}\mu_2^2\chi'^2_3\right]\Phi_{\alpha\beta} = 0,
\end{aligned}\right\} \tag{79}$$

avec ici

$$\square = \sum_{\alpha=1}^{5}\frac{\partial^2}{(\partial x^\alpha)^2}.$$

Ces équations sont très voisines de celles de l'électrodynamique généralisée de M. Podolsky étendue à l'espace à cinq dimensions.

Ces considérations nous montrent que le procédé d'unification de M. Møller et Rosenfeld, tout en s'introduisant facilement dans notre théorie, en rend toutefois certains aspects moins simples. Par exemple, on ne peut plus considérer les grandeurs de champs $\Phi_{\mu\nu}$, Φ_ν, $\Phi_{(\mu\nu\rho\sigma)}$ définies par les potentiels Φ_μ, $\Phi_{\mu\nu\rho}$, les pseudopotentiels $\Phi_{\mu\nu\rho}$ rentrant dans les 10 champs $\Phi_{\alpha\beta}$ de R_5.

4. Nous allons maintenant discuter quelques points particuliers de la théorie du corpuscule de type général que nous avons introduit et notamment préciser les valeurs du spin que l'on est conduit à attribuer au corpuscule représenté par les diverses équations d'ondes que nous avons considérées.

Bien que ces équations rappellent par leurs diverses formes tensorielles les équations des divers types de mésons auxquels on attribue les spins zéro ou $\hbar$, elles sont également apparentées aux équations de Whittaker ou d'Ericksson pour lesquelles on a montré ([13]) que le spin avait la valeur $\frac{\hbar}{2}$. D'autre part les facteurs de masses réduites $\frac{1}{\mu_1}$, $\frac{1}{\mu_2}$ introduits dans la représentation matricielle fondamentale pourraient laisser croire que les valeurs du spin dépendraient de ces coefficients et que, par suite, la théorie exposée laisserait arbitraire les valeurs propres du spin. Nous allons voir par la discussion qui va suivre que notre théorie attribue au spin du corpuscule considéré les valeurs propres zéro, $\pm\hbar$, sauf dans des cas de dégénérescence bien définis.

Pour discuter cette question, nous reviendrons d'abord des équations précédentes écrites en variables d'univers à des équations écrites en variables d'espace-temps.

Pour cela nous multiplierons l'équation (41) par $-i\,\alpha_4^{(1)}\alpha_4^{(2)}$ et nous poserons

$$p_0 = -i\hbar\frac{1}{c}\partial_t, \qquad p_p = i\hbar\frac{\partial}{\partial x^p} \qquad (p = 1, 2, 3),$$

$$\left.\begin{aligned}
A_{a,b} &= A_{b,a} = \frac{1}{2}[\alpha_a^{(1)}\alpha_b^{(2)} + \alpha_b^{(1)}\alpha_a^{(2)}],\\
B_{a,b} &= -B_{b,a} = \frac{1}{2}[\alpha_a^{(1)}\alpha_b^{(2)} - \alpha_b^{(1)}\alpha_a^{(2)}].
\end{aligned}\right\} \tag{80}$$

On voit facilement que les matrices $A_{a,b}$, $B_{a,b}$ satisfont aux mêmes lois de composition (5) que les $\Gamma_{a,b}$ et $J_{a,b}$.

([13]) Bruno, *loc. cit.*, ([10]).

L'équation (41) s'écrit

$$\left\{p_0\left(\frac{1}{\mu_1}A_{0,4}+\frac{1}{\mu_2}B_{0,4}\right)+\left[\vec{p}\left(\frac{1}{\mu_1}A_{\vec{p},4}+\frac{1}{\mu_2}B_{\vec{p},4}\right)\right]+cM\right\}\psi=0 \quad (81)$$

avec

$$M = g_0\alpha_4^{(1)}\alpha_4^{(2)}+g_1\left[\alpha_0^{(1)}\alpha_0^{(2)}-\vec{\alpha}^{(1)}\vec{\alpha}^{(2)}\right] + f_1\left[\left(\vec{\pi}^{(1)}\vec{\pi}^{(2)}\right)-\left(\vec{\mu}^{(1)}\vec{\mu}^{(2)}\right)\right] + g_2\left[\sigma_0^{(1)}\sigma_0^{(2)}-\left(\vec{\sigma}^{(1)}\vec{\sigma}^{(2)}\right)\right]+f_2\left[\alpha_{pqr4}^{(1)}\alpha_{pqr4}^{(2)}\right] \quad (82)$$

avec

$$\vec{\pi} = i\alpha_1\alpha_4,\quad i\alpha_2\alpha_4,\quad i\alpha_3\alpha_4;$$

$$\vec{\mu} = i\alpha_2\alpha_3\alpha_4,\quad i\alpha_3\alpha_1\alpha_4,\quad i\alpha_1\alpha_2\alpha_4;$$

$$\sigma_0 = i\alpha_1\alpha_2\alpha_3;\qquad \vec{\sigma} = i\alpha_2\alpha_3,\quad i\alpha_3\alpha_1,\quad i\alpha_1\alpha_2;$$

$$\alpha_{pqr4} = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4.$$

L'introduction devant p_0 de la matrice

$$\beta_0 = \frac{1}{\mu_1}A_{0,4}+\frac{1}{\mu_2}B_{0,4}$$

soulève dans notre théorie les mêmes difficultés que dans les théories du photon ou du méson l'introduction de la matrice $A_{0,4}$. On sait que ces difficultés sont liées au caractère intrinsèque du formalisme quantique (14) dans le cas des corpuscules à spin autre que $\frac{\hbar}{2}$.

L'équation (81) nous permet de définir un vecteur densité de présence-courant

$$\left.\begin{aligned}\psi^*\beta_0\psi &= \psi^*\left(\frac{1}{\mu_1}A_{0,4}+\frac{1}{\mu_2}B_{0,4}\right)\psi,\\ \psi^*\vec{\beta}\psi &= \psi^*\left(\frac{1}{\mu_1}A_{\vec{p},4}+\frac{1}{\mu_2}B_{\vec{p},4}\right)\psi,\end{aligned}\right\} \quad (83)$$

satisfaisant à l'équation de continuité

$$\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\psi^*\beta_0\psi-\operatorname{div}\left(\psi^*\vec{\beta}\psi\right)=0. \quad (84)$$

On en conclut la possibilité de normaliser des fonctions d'ondes ψ par la condition

$$\int\psi^*\beta_4\psi\,dv = \text{const.} \quad (85)$$

($dv = dx\,dy\,dz$, l'intégrale étant étendue à tout l'espace).

Mais on voit facilement que β_4 possède les valeurs propres positives et négatives $\pm\frac{1}{\mu_1}$, $\pm\frac{1}{\mu_2}$. Il en résulte les difficultés qui ont été discutées par de nombreux auteurs dans les théories du photon, du méson ou des corpuscules de spin quelconque, la normalisation pouvant s'effectuer, soit avec la valeur $+1$ de la constante dans l'expression (85), soit avec la valeur -1. Nous n'insisterons pas ici sur ces difficultés et nous considérerons la normalisation des ondes ψ effectuées par l'une des conditions

$$\int\psi^*\left(\frac{1}{\mu_1}A_{0,4}+\frac{1}{\mu_2}B_{0,4}\right)\psi\,dv = \pm 1. \quad (86)$$

Dans ces conditions, on peut associer à toute grandeur représentée par l'opérateur C, l'opérateur

$$\left(\frac{1}{\mu_1}A_{0,4}+\frac{1}{\mu_2}B_{0,4}\right)C \quad \text{ou} \quad \beta_0 C \quad (87)$$

et nous ne considérerons que les cas où l'on a

$$\beta_0 C = \pm C\beta_0. \quad (88)$$

Si l'on interprète β_0 comme opérateur associé à une densité de présence ou de localisation du corpuscule, cette condition nous limite à l'étude des grandeurs simultanément mesurables ou certainement non mesurables simultanément avec la localisation du corpuscule.

L'équation (81) écrite sous la forme

$$\beta_0 p_0\psi+\mathcal{H}\psi = 0,\quad \text{avec}\quad \mathcal{H} = \vec{p}.\vec{\beta}+cM,$$

nous donne immédiatement

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int\psi^*\beta_0 C\psi\,dv &= \frac{i}{\hbar}\int\psi^*[\mathcal{H}C-C\mathcal{H}]\psi\,dv \quad \text{si } \beta_0 C = C\beta_0,\\ &= \frac{i}{\hbar}\int\psi^*[\mathcal{H}C+C\mathcal{H}]\psi\,dv \quad \text{si } \beta_0 C = -C\beta_0.\end{aligned}\right\} \quad (89)$$

Ceci nous permet de définir des grandeurs intégrales premières, c'est-à-dire dont la valeur reste constante au cours du temps par la condition

$$\mathcal{H}C-C\mathcal{H}=0 \quad \text{ou} \quad \mathcal{H}C+C\mathcal{H}=0. \quad (90)$$

En particulier, on voit immédiatement qu'en l'absence d'interactions extérieures, cas où nous nous sommes placés jusqu'ici, l'impulsion p à laquelle correspond l'opérateur $\beta_0\, i\hbar\frac{\partial}{\partial\vec{x}}$ est intégrale première.

De même ceci nous permet d'introduire la notion de spin dans notre théorie, le spin étant la grandeur représentée par l'opérateur $\vec{S}$ complétant l'opérateur de moment orbital $L = \left(\vec{\alpha}\wedge\vec{p}\right)$, de telle sorte que le moment total

$$\left(\vec{x}\wedge\vec{p}\right)+\vec{S} \quad (91)$$

soit une intégrale première.

Or nous avons immédiatement

$$\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int\psi^*\beta_0\vec{L}\psi\,dv = -\int\psi^*\left(\vec{\beta}\wedge\vec{p}\right)\psi\,dv, \quad (92)$$

(14) L. de Broglie, *Une nouvelle théorie de la lumière*, Chap. VIII, 1. — N. Kemmer, *loc. cit.* — M. Fierz, *Helvet Phys. Acta*, 1939, p. 1-37.

d'où la condition sur $\vec{S}$

$$\mathcal{H}\vec{S} - \vec{S}\mathcal{H} = -i\hbar(\vec{\beta} \wedge \vec{p}), \quad (93)$$

qui s'écrit encore

$$[\vec{\beta} \wedge \vec{S}] = -i\hbar\vec{\beta},$$

$$M\vec{S} - \vec{S}M = 0. \quad (95)$$

Si nous cherchons une solution de ce système, par analogie avec les solutions correspondant aux cas du photon ou du méson en posant

$$S = \lambda A_{\vec{\sigma},0} + \lambda' B_{\vec{\sigma},0},$$

on obtient facilement

$$[\vec{\beta} \wedge \vec{S}] = -i\left[\left(\frac{\lambda}{\mu_1} + \frac{\lambda'}{\mu_2}\right)A_{\vec{p},4} + \left(\frac{\lambda'}{\mu_1} + \frac{\lambda}{\mu_2}\right)B_{\vec{p},4}\right],$$

ce qui nous donne pour déterminer λ et λ' l'équation

$$\left(\frac{\lambda}{\mu_1} + \frac{\lambda'}{\mu_2}\right)A_{\vec{p},4} + \left(\frac{\lambda'}{\mu_1} + \frac{\lambda}{\mu_2}\right)B_{\vec{p},4} = \hbar\left[\frac{1}{\mu_1}A_{\vec{p},4} + \frac{1}{\mu_2}B_{\vec{p},4}\right],$$

d'où nous tirons

$$\frac{\lambda}{\mu_1} + \frac{\lambda'}{\mu_2} = \frac{\hbar}{\mu_1}, \qquad \frac{\lambda'}{\mu_1} + \frac{\lambda}{\mu_2} = \frac{\hbar}{\mu_2}. \quad (96)$$

Par suite, si $\mu_1^2 \neq \mu_2^2$, nous obtenons immédiatement la solution de l'équation (94)

$$\lambda = \hbar, \qquad \lambda' = 0, \quad (94)$$

d'où

$$\vec{S} = \hbar A_{\vec{\sigma},0} = \frac{\hbar}{2}\left[\vec{\sigma}^{(1)}\alpha_0^{(2)} + \alpha_0^{(1)}\vec{\sigma}^{(2)}\right] \quad (97)$$

et l'on voit facilement que cette solution vérifie (95) avec pour M l'opérateur (82). La matrice $A_{\vec{\sigma},0}$ possède les valeurs propres o, $\pm$ 1, ce qui nous conduit à attribuer au corpuscule considéré le spin $\pm \hbar$ ou zéro.

Toutefois, si nous avons $\mu_1 = \mu_2$, ce qui signifie que nous avons adopté une représentation de Whittaker-Ericksson généralisée, le raisonnement ci-dessous n'est plus valable, l'équation (81) se ramène à quatre équations de Dirac (complétées toutefois par un terme de masse qui mélange les quatre systèmes de quatre équations) et la méthode précédente nous donne pour solution de l'équation (94) dans le cas $\mu_1 = \mu_2$,

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}^{(1)} + \left(\lambda - \frac{\hbar}{2}\right)\vec{\sigma}^{(2)}, \quad (98)$$

λ étant arbitraire.

Cette solution se distingue de celle de Bruno

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2}(\vec{\sigma})^{(1)}$$

relative aux équations d'Ericksson qui ne tient pas compte du second terme de $\vec{S}$.

Mais l'équation (94) ne suffit pas. Il nous faut également tenir compte de l'équation (95).

Nous voyons immédiatement que les termes en g_0 et f_2 commutent toujours avec $\vec{S}$. Si nous considérons le terme en g_1

$$g_1 G_1 = g_1\left[\alpha_0^{(1)}\alpha_0^{(2)} - \left(\vec{\alpha}^{(1)}\vec{\alpha}^{(2)}\right)\right],$$

nous obtenons avec l'expression (98) de $\vec{S}$,

$$SG_1 - G_1 S = [\lambda - \hbar]\left[\vec{\alpha}^{(1)} \wedge \vec{\alpha}^{(2)}\right],$$

d'où la condition de commutation $\lambda = \hbar$ et, par suite,

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\left[\vec{\sigma}^{(1)} + \vec{\sigma}^{(2)}\right].$$

Nous retrouvons l'expression (97) du spin. On voit facilement que la commutation de cette expression avec G_1 entraîne celle avec les autres termes de M.

Par suite, même avec la représentation d'Ericksson-Whittaker généralisée, la complexité du terme M entraîne pour le spin l'existence d'un opérateur possédant les valeurs propres zéro et $\pm \hbar$.

Je remercie vivement M. le Professeur Louis de Broglie pour la bienveillante attention qu'il a bien voulu accorder à ce travail.

Manuscrit reçu le 17 janvier 1949.

ERRATUM.

Quelques mesures sur le ciel nocturne à Tamanrasset (Hoggar) ;

par MM. P. Abadie et E. Vassy et Mme A. Vassy

(*Bull. Soc. franç. Phys.*, 1949, p. 9 S.).

2e colonne, ligne 34, *lire :*

« passant de 1000 km au début de la nuit à 300-400 km environ vers 3 h du matin. »

Le Gérant : Maurice Blondin. 131479 Imp. Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins, Paris. — 1949.